§15. 第二基本形式

§14 において扱ったように, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式を

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると, E, F, G は p の偏導関数を用いて,

$$E = \langle p_u, p_u \rangle,\ F = \langle p_u, p_v \rangle,\ G = \langle p_v, p_v \rangle$$

によりあたえられた. これに対して第二基本形式は p の 2 次の偏導関数と単位法ベクトルを用いて表される.
ν を p の単位法ベクトルとし, D で定義された関数 L, M, N を

$$L = \langle p_{uu}, \nu \rangle,\ M = \langle p_{uv}, \nu \rangle,\ N = \langle p_{vv}, \nu \rangle$$

により定める. このとき,

$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とおき, これを p の第二基本形式という.

例　関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておくと,

$$p_{uu} = (0, 0, f_{uu}),\ p_{uv} = (0, 0, f_{uv}),\ p_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

また, 問題 13 においても扱ったように, p の単位法ベクトルを ν とすると,

$$\nu = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

よって,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}},\ \langle p_{uv}, \nu \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}},\ \langle p_{vv}, \nu \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

したがって, p の第二基本形式は

$$\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}du^2 + \frac{2f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dudv + \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dv^2.$$

例　平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき, 柱面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.
このとき,

$$p_{uu} = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0),\ p_{uv} = 0,\ p_{vv} = 0.$$

また, §14 においても扱ったように, p の単位法ベクトルを ν とすると,

$$\nu = \frac{(\dot{y}, -\dot{x}, 0)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

よって,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\ \langle p_{uv}, \nu \rangle = 0,\ \langle p_{vv}, \nu \rangle = 0.$$

したがって, p の第二基本形式は

$$\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} du^2.$$

第一基本形式は曲面上の曲線の長さを求める場合に現れたが, 第二基本形式はどのような意味をもつのであろうか.
まず, 弧長により径数付けられた p 上の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表しておく.
γ の 2 階微分 γ'' は $\mathbf{R}^3$ に値をとる関数であるが, 接平面に値をとる関数と単位法ベクトル方向に値をとる関数の和で

$$\gamma'' = k_g + k_n$$

と一意的に表すことができる. ただし, k_g は接平面に値をとる関数, k_n は単位法ベクトル方向に値をとる関数である. k_g, k_n をそれぞれ γ の測地的曲率ベクトル, 法曲率ベクトルという. また, k_g が恒等的に 0 となるとき, γ を測地線という.
法曲率ベクトル k_n は単位法ベクトル ν の方向に値をとるから, ある関数

$$\kappa_n : I \to \mathbf{R}$$

が存在し

$$k_n(s) = \kappa_n(s)\nu(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表される. κ_n を γ の法曲率という.
$(u(s), v(s))$ と ν を合成して得られる写像も単に ν と表すことにすると,

$$\begin{aligned} \langle \gamma'', \nu \rangle &= \langle k_g + k_n, \nu \rangle \\ &= \langle k_n, \nu \rangle \\ &= \kappa_n. \end{aligned}$$

一方,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v'$$

だから,

$$\begin{aligned}\gamma'' &= p_{uu}(u')^2 + p_{uv}v'u' + p_u u'' + p_{vu}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_v v'' \\ &= p_{uu}(u')^2 + 2p_{uv}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_u u'' + p_v v''.\end{aligned}$$

よって,

$$\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$$

となる. すなわち, 第二基本形式は曲面上の曲線の法曲率を求める場合に現れるのである.
次に, p の面積要素が $\sqrt{EG-F^2}dudv$ と表されたことを思い出そう. 第二基本形式を用いて表される関数 $LN-M^2$ については次がなりたつ.

定理 曲面 p は $LN-M^2>0$ となる点で凸で, $LN-M^2<0$ となる点で鞍状となる.

証明 $(u_0,v_0)\in D$ を固定しておき, 関数

$$f: D \to \mathbf{R}$$

を

$$f(u,v) = \langle p(u,v), \nu(u_0,v_0)\rangle \quad ((u,v)\in D)$$

により定める. f は p の $\nu(u_0,v_0)$ 方向の高さを表す.
ここで,

$$f_u(u,v) = \langle p_u(u,v), \nu(u_0,v_0)\rangle$$

だから,

$$\begin{aligned}f_u(u_0,v_0) &= \langle p_u(u_0,v_0), \nu(u_0,v_0)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に,

$$f_v(u_0,v_0) = 0.$$

よって, (u_0,v_0) は f の極値をあたえる点の候補となる.
H_f を (u_0,v_0) における f の Hessian とすると,

$$H_f = f_{uu}(u_0,v_0)f_{vv}(u_0,v_0) - (f_{uv}(u_0,v_0))^2.$$

ここで,

$$f_{uu}(u,v) = \langle p_{uu}(u,v), \nu(u_0,v_0)\rangle$$

だから,

$$\begin{aligned}f_{uu}(u_0,v_0) &= \langle p_{uu}(u_0,v_0), \nu(u_0,v_0)\rangle \\ &= L(u_0,v_0).\end{aligned}$$

同様に,

$$f_{vv}(u_0,v_0) = N(u_0,v_0),\ \ f_{uv}(u_0,v_0) = M(u_0,v_0).$$

したがって,

$$H_f = L(u_0,v_0)N(u_0,v_0) - (M(u_0,v_0))^2$$

だから, p は $LN-M^2>0$ となる点で凸で, $LN-M^2<0$ となる点で鞍状. □

問題 15

1. 平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. ただし, f は常に正であるとする. このとき, 回転面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると, 問題 14 においても扱ったように, p の単位法ベクトルは

$$\frac{(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}$$

となる. p の第二基本形式を求めよ.

2. $a > 0$ とする. 原点中心, 半径 a の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると, 問題 13 において扱ったことから分かるように, p の単位法ベクトルは

$$(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

となる. $u_0 \in (0, \pi)$ を固定しておき, 弧長により径数付けられた p 上の空間曲線

$$\gamma : (0, 2\pi a \sin u_0) \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = \left(a \sin u_0 \cos \frac{s}{a \sin u_0}, a \sin u_0 \sin \frac{s}{a \sin u_0}, a \cos u_0 \right) \quad (s \in (0, 2\pi a \sin u_0))$$

により定める.

(1) γ の法曲率を求めよ.

(2) γ の法曲率ベクトルを求めよ.

(3) γ の測地的曲率ベクトルを求めよ.

(4) γ の測地的曲率ベクトルの長さを求めよ.

(5) γ が測地線となるときの u_0 を求めよ.

問題 15 の解答

1. まず,

$$\begin{cases} p_{uu} = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \\ p_{uv} = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0), \\ p_{vv} = (-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0). \end{cases}$$

よって, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$\langle p_{uu}, \nu\rangle = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}},\ \langle p_{uv}, \nu\rangle = 0,\ \langle p_{vv}, \nu\rangle = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}.$$

したがって, p の第二基本形式は

$$\frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}du^2 + \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}dv^2.$$

2. (1) まず,

$$\gamma' = \left(-\sin\frac{s}{a\sin u_0}, \cos\frac{s}{a\sin u_0}, 0\right)$$

だから,

$$\gamma'' = \left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{s}{a\sin u_0}, -\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0}, 0\right).$$

よって, ν を p の単位法ベクトル, κ_n を γ の法曲率とすると,

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \gamma'', \nu\rangle \\ &= \left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{s}{a\sin u_0}\right)\left(\sin u_0\cos\frac{s}{a\sin u_0}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0}\right)\left(\sin u_0\sin\frac{s}{a\sin u_0}\right) + 0\cdot\cos u_0 \\ &= -\frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(2) (1) より, γ の法曲率ベクトルは

$$\kappa_n\nu = -\frac{1}{a}\left(\sin u_0\cos\frac{s}{a\sin u_0}, \sin u_0\sin\frac{s}{a\sin u_0}, \cos u_0\right).$$

(3) (2) より, γ の測地的曲率ベクトルは

$$\begin{aligned} \gamma'' - \kappa_n\nu &= \left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{s}{a\sin u_0}, -\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0}, 0\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{a}\sin u_0\cos\frac{s}{a\sin u_0}, \frac{1}{a}\sin u_0\sin\frac{s}{a\sin u_0}, \frac{1}{a}\cos u_0\right) \\ &= -\frac{\cos u_0}{a}\left(\frac{\cos u_0}{\sin u_0}\cos\frac{s}{a\sin u_0}, \frac{\cos u_0}{\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0}, -1\right). \end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$\begin{aligned} \|\gamma'' - \kappa_n\nu\|^2 &= \frac{\cos^2 u_0}{a^2}\left(\frac{\cos^2 u_0}{\sin^2 u_0} + 1\right) \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\cos^2 u_0}{\sin^2 u_0}. \end{aligned}$$

よって, γ の測地的曲率ベクトルの長さは

$$\begin{aligned}\|\gamma'' - \kappa_n \nu\| &= \frac{1}{a}\left|\frac{\cos u_0}{\sin u_0}\right| \\ &= \frac{|\cot u_0|}{a}.\end{aligned}$$

(5) γ が測地線となるのは測地的曲率ベクトルが恒等的に 0 となるときだから, (4) より,

$$\cot u_0 = 0.$$

$u_0 \in (0, \pi)$ だから, これを解くと,

$$u_0 = \frac{\pi}{2}.$$