§1. Euclid 空間の接ベクトル

微分積分や線形代数において現れる n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は曲がっていない真っ平らな空間であるが, その一般化である多様体というものは大雑把に言えば $\mathbf{R}^n$ の一部分達を張り合わせたものであり, 一般には曲がった空間であると言える. そのような曲がったものを調べるために最も基本的で有効な方法は真っ平らなもので近似することである.
なお, 以下では特に断らない限り, 関数や写像などはある程度微分可能であるとする.

例　I を区間とし, $\mathbf{R}^n$ 内の正則な曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考える. すなわち, 任意の $t \in I$ に対して $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ である.
$t_0 \in I$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, これは $\gamma(t_0)$ を通る直線達の中で γ を $\gamma(t_0)$ の近くで最も良く近似するものである.

上の例は状況が単純すぎるので, 曲面の場合を考えよう.

例　D を uv 平面内の領域とし, 正則な曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を考える. すなわち, 任意の $(u, v) \in D$ に対して

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix} = 2$$

である.
$(u_0, v_0) \in D$ とすると, p の $p(u_0, v_0)$ における接平面は

$$\Pi = \{p(u_0,v_0) + p_u(u_0,v_0)(u-u_0) + p_v(u_0,v_0)(v-v_0) | (u,v) \in \mathbf{R}^2\}$$

によりあたえられ, これは $p(u_0, v_0)$ を通る平面達の中で p を $p(u_0, v_0)$ の近くで最も良く近似するものである.
Π は 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0,v_0)u + p_v(u_0,v_0)v | (u,v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下ではこの部分空間も Π と表すことにする.
Π の元, すなわち $p(u_0, v_0)$ における接ベクトルは, 次のようにして p 上の曲線の微分を用いても表すことができる.
p 上の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく.

合成関数の微分法より,

$$\dot{\gamma} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v}$$

だから, 特に

$$0 \in I,\ \gamma(0) = p(u_0, v_0)$$

のとき,

$$u_1 = \dot{u}(0),\ v_1 = \dot{v}(0)$$

とおくと, γ の $t = 0$ における接ベクトルは

$$\dot{\gamma}(0) = p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1 \in \Pi$$

となる.

多様体に対しても接ベクトルを考えるためには, 上のような接ベクトルを更に微分作用素というものと対応させる必要がある. 以下では $\mathbf{R}^n$ の接ベクトルについて考えよう.
$p \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき, I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0) = p$ となる $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考える.
γ を

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくと, γ の $t = 0$ における接ベクトルは

$$\dot{\gamma}(0) = (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{x}_3(0), \ldots, \dot{x}_n(0))$$

である. 特に, 接ベクトル全体は $\mathbf{R}^n$ 自身と同一視できる.
ここで,

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とし, 合成関数 $f \circ \gamma$ の微分を計算してみよう.
合成関数の微分法より,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

特に,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

この値を $v_\gamma(f)$ と表すことにする. f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t = 0$ における方向微分という. また, $v_\gamma(f)$ を f の $t = 0$ における γ 方向の微分係数という.
$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとし, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ とすると, $\dot{\gamma}(0) = e_i$ のとき,

$$v_\gamma(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

定理　$a, b \in \mathbf{R}$ とし,

$$f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $v_\gamma(af+bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g)$.
(2) $v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g)$.

証明　(1): まず,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((af+bg)\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}(a(f\circ\gamma)+b(g\circ\gamma)) \\ &= a\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) + b\frac{d}{dt}(g\circ\gamma).\end{aligned}$$

$t=0$ とすると,

$$v_\gamma(af+bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g).$$

(2): 積の微分法より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((fg)\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(g\circ\gamma)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right)(g\circ\gamma) + (f\circ\gamma)\frac{d}{dt}(g\circ\gamma).\end{aligned}$$

$t=0$ とすると,

$$v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g).$$

□

更に, $i=1,2,3,\ldots,n$ に対して f から $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ への対応を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする. このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f$$

と表すことができる.
よって, p における接ベクトル $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ は

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と同一視することができる.
p における接ベクトル全体の集合を $T_p\mathbf{R}^n$ と表す. 上の同一視を用いると,

$$\begin{aligned}T_p\mathbf{R}^n &= \{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n) | a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n \in \mathbf{R}\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n \in \mathbf{R}\right\}.\end{aligned}$$

$T_p\mathbf{R}^n$ は自然に n 次元ベクトル空間となる. $T_p\mathbf{R}^n$ を p における接ベクトル空間または接空間という.

問題 1

1. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

により定める.
(1) f は $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せ.
(2) $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ を固定しておく. I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=t(a,b) \quad (t\in I)$$

により定める. $v_\gamma(f)$ の値が存在するための条件を求めよ.

2. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

により定める.
(1) f は $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せ.
(2) $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ を固定しておく. I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=t(a,b) \quad (t\in I)$$

により定める. このとき, $v_\gamma(f)$ を求めよ.

3. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 f を固定しておく. I を 0 を含む区間とし, $e\in\mathbf{R}^2$ に対して $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=te \quad (t\in I)$$

により定める. e が長さ 1 のベクトル全体を動くとき, $v_\gamma(f)$ の最小値を求めよ.

問題 1 の解答

1. (1) $x=y$ として (x,y) が原点に近づくときの $f(x,y)$ の極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\\ &\neq f(0,0).\end{aligned}$$

よって, f は $(0,0)$ で連続でないから, 全微分可能でない.

(2) まず, $(a,b)=(0,0)$ のとき, $f\circ\gamma=0$ だから,

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=0.$$

よって,

$$v_\gamma(f)=0.$$

次に, $(a,b)\neq(0,0)$ のとき,

$$(f\circ\gamma)(t)=\begin{cases}\dfrac{ab}{a^2+b^2} & (t\neq 0),\\ 0 & (t=0).\end{cases}$$

よって, $ab=0$ のとき,

$$\begin{aligned}v_\gamma(f) &= \lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}\\ &= 0.\end{aligned}$$

一方, $ab\neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}v_\gamma(f) &= \lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{ab}{t(a^2+b^2)}\end{aligned}$$

となり, $v_\gamma(f)$ の値は存在しない.

以上より, 求める条件は $a=0$ または $b=0$.

2. (1) $y=x^2$ として (x,y) が原点に近づくときの $f(x,y)$ の極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\\ &\neq f(0,0).\end{aligned}$$

よって, f は $(0,0)$ で連続でないから, 全微分可能でない.

(2) まず, $(a,b)=(0,0)$ のとき, $f\circ\gamma=0$ だから,

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=0.$$

よって,

$$v_\gamma(f)=0.$$

次に, $(a,b)\neq(0,0)$ のとき,

$$(f\circ\gamma)(t)=\begin{cases}\dfrac{ta^2b}{t^2a^4+b^2} & (t\neq 0),\\ 0 & (t=0).\end{cases}$$

よって, $b=0$ のとき,

$$\begin{aligned}v_\gamma(f)&=\lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}\\&=0.\end{aligned}$$

また, $b\neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}v_\gamma(f)&=\lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{a^2b}{t^2a^4+b^2}\\&=\frac{a^2}{b}.\end{aligned}$$

3. $v_\gamma(f)$ は

$$v_\gamma(f)=\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0),\frac{\partial f}{\partial y}(0)\right),e\right\rangle$$

と表される.

よって, $v_\gamma(f)$ は e が $-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)\right)$ と同じ向きのとき, すなわち

$$e=-\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)\right)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0),\frac{\partial f}{\partial y}(0)\right)$$

のとき, 最小値

$$-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0)\right)^2}$$

をとる.