

§4. Euclid 空間上のベクトル場

§1において, Euclid 空間 \mathbf{R}^n の固定された1点における接ベクトルというものを考えた. ここでは, \mathbf{R}^n の各点毎に接ベクトルが対応している状況を考えよう. すなわち, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $X_p \in T_p\mathbf{R}^n$ があたえられているとするのである. この対応を X と表し, \mathbf{R}^n 上のベクトル場という.

$p \in \mathbf{R}^n$ とすると, p における接ベクトルは

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \quad (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表されたから, \mathbf{R}^n 上のベクトル場 X は \mathbf{R}^n で定義された関数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を用いて,

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すことができる. もちろん, このベクトル場は各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して, p における接ベクトル

$$X_p = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

が対応しているのである.

\mathbf{R}^n 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ と表すことにする. $\mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ に対して次の2つの演算を定めることができる.

まず, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ のとき, $X + Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (p \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. $T_p\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であったから, 加法が定義されていることを思い出そう.

次に, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ と \mathbf{R}^n で定義された関数 f に対して, $fX \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad (p \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. ここでも, $T_p\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であったから, スカラー倍が定義されていることを思い出そう.

また, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $T_p\mathbf{R}^n$ の零ベクトルを対応させるベクトル場を 0 と表す.

更に, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ のとき, $-X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$(-X)_p = -X_p \quad (p \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.

このとき, 次がなりたつことは明らかであろう.

定理 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とし, f, g を \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, 次の(1)~(8)がなりたつ.

(1) $X + Y = Y + X$.

(2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

(3) $X + 0 = X$.

(4) $X + (-X) = 0$.

(5) $(fg)X = f(gX)$.

$$(6) (f + g)X = fX + gX.$$

$$(7) f(X + Y) = fX + fY.$$

$$(8) 1X = X.$$

なお, 上のような構造をもつ集合を加群という.

$X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とし, f を \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, \mathbf{R}^n で定義された関数 Xf を

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad (p \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. 接ベクトルと関数に対しては方向微分が定義されていたことを思い出そう. Xf を X による f の微分という. このとき, 次がなりたつ.

定理 $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とし, f, g を \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

$$(1) a, b \in \mathbf{R} \text{ とすると, } X(af + bg) = aXf + bXg.$$

$$(2) X(fg) = (Xf)g + f(Xg).$$

証明 (1)のみ示す.

$p \in \mathbf{R}^n$ とすると, 方向微分の性質より,

$$\begin{aligned} (X(af + bg))(p) &= X_p(af + bg) \\ &= aX_p(f) + bX_p(g) \\ &= ((aX)(f))(p) + ((bX)(g))(p) \\ &= (aXf + bXg)(p). \end{aligned}$$

よって,

$$X(af + bg) = aXf + bXg.$$

□

$\mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ に対しては上で定義した和と関数倍の他に, 次のようにして交換子積または括弧積という演算を定めることができる.

$X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とし,

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておく. f を \mathbf{R}^n で定義された関数とすると,

$$\begin{aligned} Y(Xf) &= Y \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n Y \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta_j \xi_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right). \end{aligned}$$

同様に,

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_j \eta_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

よって, XY, YX はともにいわゆる 2 階の微分作用素となる.
しかし, ここで上の 2 式の差を計算してみると,

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

となるから,

$$(XY - YX)(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

と表すことができる.

以上の計算より, $XY - YX \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$XY - YX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

により定め, これを $[X, Y]$ と表す. $[X, Y]$ を X と Y の交換子積または括弧積という.
括弧積に関して次がなりたつ.

定理 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき, 次の (1)~(4) がなりたつ.

- (1) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$, $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
- (2) $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi の恒等式).
- (4) f, g を \mathbf{R}^n で定義された関数とすると, $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

証明 (4) のみ示す.

h を \mathbf{R}^n で定義された関数とすると,

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= (fX)((gY)h) - (gY)((fX)h) \\ &= (fX)(g \cdot Yh) - (gY)(f \cdot Xh) \\ &= f((Xg)(Yh) + gX(Yh)) - g((Yf)(Xh) + fY(Xh)) \\ &= fg(X(Yh) - Y(Xh)) + f(Xg)Yh - g(Yf)Xh \\ &= fg[X, Y]h + f(Xg)Yh - g(Yf)Xh. \end{aligned}$$

よって,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

□

$X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ が $[X, Y] = 0$ をみたすとき, X と Y は交換可能または可換であるという.

(2) より, $[X, X] = 0$ がなりたつから, X と X は可換である. また, 任意の $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $\frac{\partial}{\partial x_i}$ と $\frac{\partial}{\partial x_j}$ が可換であることも容易に分かる.

更に, $a, b \in \mathbf{R}$ とすると, (4) より,

$$[aX, bY] = ab[X, Y]$$

がなりたつ.

問題 4

1. \mathbf{R} 上のベクトル場を $\xi \frac{d}{dx}$ のように表すことにする.

(1) \mathbf{R} 上の 2 つのベクトル場 $\xi \frac{d}{dx}$ と $\eta \frac{d}{dx}$ の括弧積を求めよ.

(2) $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$X_k = x^k \frac{d}{dx}$$

とおく. $k, l \in \mathbf{N}$ のとき,

$$[X_k, X_l] = (l - k)X_{k+l-1}$$

がなりたつことを示せ.

2. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

により定める. また, $BA - AB = (c_{ij})$ とおく. このとき,

$$[X, Y] = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} x_k \frac{\partial}{\partial x_i}$$

がなりたつことを示せ.

3. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をどの点でも 0 とならないような \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$X_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

により定める. 任意の $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, X_i と X_j が可換となるための条件を求めよ.

4. $n, m \in \mathbf{N}$ とし, \mathbf{R}^{n+m} を

$$\mathbf{R}^{n+m} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \mid x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbf{R}\}$$

と表しておく. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を x_1, x_2, \dots, x_n の関数, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ を y_1, y_2, \dots, y_m の関数とし, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^{n+m})$ を

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

により定める. X と Y は可換であることを示せ.

5. I を 0 を含む区間, A, B を n 次の正方行列とし,

$$F(t) = \exp(tA)B \exp(-tA)$$

とおく. このとき, $F'(0)$ を求めよ.

問題 4 の解答

1. (1) 括弧積の性質を用いると,

$$\begin{aligned} \left[\xi \frac{d}{dx}, \eta \frac{d}{dx} \right] &= \xi \eta \left[\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right] + \xi \left(\frac{d}{dx} \eta \right) \frac{d}{dx} - \eta \left(\frac{d}{dx} \xi \right) \frac{d}{dx} \\ &= (\xi \eta' - \eta \xi') \frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} [X_k, X_l] &= \left[x^k \frac{d}{dx}, x^l \frac{d}{dx} \right] \\ &= \{ x^k (x^l)' - x^l (x^k)' \} \frac{d}{dx} \\ &= (l - k) x^{k+l-1} \frac{d}{dx} \\ &= (l - k) X_{k+l-1}. \end{aligned}$$

2. 括弧積の性質を用いると,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{k,l=1}^n b_{kl} x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \left[a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, b_{kl} x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \left\{ a_{ij} x_j \cdot b_{kl} x_l \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + a_{ij} x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (b_{kl} x_l) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right. \\ &\quad \left. - b_{kl} x_l \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} x_j) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} x_j \cdot b_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i,k,l=1}^n b_{kl} x_l \cdot a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n b_{ij} a_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} b_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,k=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij} a_{jk} - a_{ij} b_{jk}) x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,k=1}^n c_{ik} x_k \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

3. $i, j = 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j$ とし, 括弧積の性質を用いると,

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \xi_i \xi_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \xi_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} - \xi_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \xi_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \xi_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ はどの点でも 0 とならないから, $[X_i, X_j] = 0$ となるのは

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = 0$$

のとき.

よって, 求める条件は各 ξ_i が x_i のみの関数となるとき.

4. 括弧積の性質を用いると,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \eta_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \xi_i \eta_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right] + \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_j \right) \frac{\partial}{\partial y_j} - \eta_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \xi_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. まず,

$$F'(t) = A \exp(tA) B \exp(-tA) - \exp(tA) B A \exp(-tA).$$

$\exp 0 = E$ だから,

$$F'(0) = AB - BA.$$