

§7. Euclid 空間上の微分形式

§6までの準備を基に, Euclid 空間 \mathbf{R}^n 上の微分形式を定義しよう.

まず, 1次微分形式から考える.

$p \in \mathbf{R}^n$ に対して, p における接空間 $T_p\mathbf{R}^n$ の双対空間 $(T_p\mathbf{R}^n)^*$ を $T_p^*\mathbf{R}^n$ と表すことにする. $T_p^*\mathbf{R}^n$ を p における余接ベクトル空間または余接空間という.

各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_p \in T_p^*\mathbf{R}^n$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, \mathbf{R}^n 上の1次微分形式という.

ω を \mathbf{R}^n 上の1次微分形式とし, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, $\omega(X)$ は \mathbf{R}^n 上の関数を定める.

例 (関数の微分)

関数の微分は1次微分形式を定める.

f を \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, §2において扱ったように, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して線形写像

$$(df)_p: T_p\mathbf{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbf{R}$$

が定まる.

ここで,

$$T_{f(p)}\mathbf{R} = \left\{ a \left(\frac{d}{dx} \right)_{f(p)} \mid a \in \mathbf{R} \right\} = \{a \in \mathbf{R}\}$$

と自然な同一視を行うと, $(df)_p \in T_p^*\mathbf{R}^n$ である.

よって, df は \mathbf{R}^n 上の1次微分形式を定める.

また, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると,

$$(df)(X) = Xf,$$

すなわち

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

が各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対してなりたつ.

\mathbf{R}^n を

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

と表しておく, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ は \mathbf{R}^n 上の関数とみなすことができる. これらの微分を考えてみると, 次が得られる.

定理 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \dots, (dx_n)_p\}$ は $T_p\mathbf{R}^n$ の基底 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ の双対基底.

証明 $i, j = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} (dx_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p (x_i) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

□

例 (全微分)

f を \mathbf{R}^n で定義された関数とすると,

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n (df) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

すなわち,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

これはまさに多変数の微分積分において現れる全微分の式である.

更に, 高次の微分形式を考えよう.

各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* \mathbf{R}^n$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, \mathbf{R}^n 上の k 次微分形式という.

ω を \mathbf{R}^n 上の k 次微分形式とし, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, $\omega(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$ は \mathbf{R}^n 上の関数を定める.

\mathbf{R}^n 上の k 次微分形式全体の集合を $D^k(\mathbf{R}^n)$ と表すことにする.

交代形式に対する外積はそのまま微分形式に対する外積を定め, 次の2つの定理がなりたつ.

定理 $\omega, \omega_1, \omega_2 \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とし, a, b を \mathbf{R}^n で定義された関数とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

$$(1) (a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a\omega_1 \wedge \theta + b\omega_2 \wedge \theta.$$

$$(2) \omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega \wedge \theta_1 + b\omega \wedge \theta_2.$$

定理 $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$, $\psi \in D^r(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

$$(1) \omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega.$$

$$(2) (\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi) \text{ (結合律).}$$

φ を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像とすると, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して線形写像

$$(d\varphi)_p : T_p \mathbf{R}^n \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbf{R}^m$$

が定まる. よって, $\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$ とすると, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_{\varphi(p)}$ の $(d\varphi)_p$ による引き戻し $(d\varphi)_p^* \omega_{\varphi(p)}$ が定まるが, これを単に $(\varphi^* \omega)_p$ と表す. $(\varphi^* \omega)_p$ は更に写像

$$\varphi^* : D^k(\mathbf{R}^m) \rightarrow D^k(\mathbf{R}^n)$$

を定めるが, これも引き戻しという.

なお, 0階の共変テンソル空間や0次の交代形式全体の集合は \mathbf{R} とみなす. このとき, $D^0(\mathbf{R}^m)$ は \mathbf{R}^m で定義された関数全体とみなすことができるが, 関数の引き戻しは写像の合成により定める. すなわち, $f \in D^0(\mathbf{R}^m)$ とすると,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

である.

引き戻しと外積の定義より, 次のなりたつ.

定理 $\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^m)$ とし, φ を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像とする. このとき,

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta).$$

微分形式に対しては外微分という操作によって, その次数を1つ上げたものを作ることができる. すなわち, k 次微分形式から $(k+1)$ 次微分形式を対応させることができる.

$k \geq 1$ のとき, 1つめの定理より, $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$ は

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

と表すことができる. ただし, $f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}$ は \mathbf{R}^n で定義された関数である. このとき, $d\omega \in D^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ を

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k} df_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

により定める. $d\omega$ を ω の外微分という.

また, $f \in D^0(\mathbf{R}^n)$ に対しては, 関数の微分として外微分 $df \in D^1(\mathbf{R}^n)$ を定める. 外微分に関する基本的な性質を3つ挙げておこう.

定理 $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$

定理 $d^2 = 0$. すなわち, 任意の $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$d(d\omega) = 0.$$

証明 $f \in D^0(\mathbf{R}^n)$ に対して, $d(df) = 0$ がなりたつことのみ示す. 2つめの例の計算より,

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

定理 $\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$ とし, φ を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像とする. このとき,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

問題 7

1. $\theta \in D^1(\mathbf{R}^{2n})$ を

$$\theta = \sum_{i=1}^n x_{2i-1} dx_{2i}$$

により定める. なお, θ を Liouville 形式という.

(1) $d\theta$ を求めよ. なお, $d\theta$ を標準シンプレクティック形式という.

(2) $d\theta$ の n 個の外積を $(d\theta)^n$ と表すことにする. $(d\theta)^n$ を求めよ.

2. $\omega \in D^k(\mathbf{R}^l)$ とし, φ を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像, ψ を \mathbf{R}^m から \mathbf{R}^l への写像とする. このとき,

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \psi^* \omega$$

がなりたつことを示せ.

3. $f_1, f_2, \dots, f_k \in D^0(\mathbf{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \in D^1(\mathbf{R}^n)$ とする.

(1) 等式

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \dots \wedge \omega_k$$

を示せ.

(2) 等式

$$d(df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$$

を示せ.

4. $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とする. $d\omega = 0$, $d\theta = 0$ ならば, $d(\omega \wedge \theta) = 0$ であることを示せ.

5. $\omega \in D^1(\mathbf{R}^n)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき,

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

がなりたつことを示せ. なお, $k \geq 1$ のとき, $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $X_1, X_2, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると,

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

がなりたつことが分かる. ただし, 右辺において $\hat{}$ を付けているのは, その部分を除くことを意味する.

問題 7 の解答

1. (1) 外微分の定義より,

$$d\theta = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}.$$

(2) $i \neq j$ のとき,

$$(dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) \wedge (dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}) = (dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}) \wedge (dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}).$$

また,

$$(dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) \wedge (dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) = 0.$$

更に, $D^{2n}(\mathbf{R}^{2n})$ の元は

$$f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$$

と表すことができる.

よって,

$$(d\theta)^n = n! dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}.$$

2. $k = 0$ のとき, 写像の合成に関する結合律より,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)^* \omega &= \omega \circ (\psi \circ \varphi) \\ &= (\omega \circ \psi) \circ \varphi \\ &= \varphi^*(\omega \circ \psi) \\ &= \varphi^* \psi^* \omega. \end{aligned}$$

$k \geq 1$ のとき, $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, 連鎖律より,

$$\begin{aligned} ((\psi \circ \varphi)^* \omega)(X_1, X_2, \dots, X_k) &= \omega((d(\psi \circ \varphi))(X_1), (d(\psi \circ \varphi))(X_2), \dots, (d(\psi \circ \varphi))(X_k)) \\ &= \omega((d\psi \circ d\varphi)(X_1), (d\psi \circ d\varphi)(X_2), \dots, (d\psi \circ d\varphi)(X_k)) \\ &= \omega(d\psi((d\varphi)(X_1)), d\psi((d\varphi)(X_2)), \dots, d\psi((d\varphi)(X_k))) \\ &= (\psi^* \omega)((d\varphi)(X_1), (d\varphi)(X_2), \dots, (d\varphi)(X_k)) \\ &= (\varphi^* \psi^* \omega)(X_1, X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

よって,

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \psi^* \omega.$$

3. (1) k に関する数学的帰納法により示す.

$k = 1$ のとき, 等式は正しい.

$k = l$ のとき, 等式が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned} &d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{l+1}) \\ &= d((\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge \omega_{l+1}) \\ &= d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge \omega_{l+1} + (-1)^l (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge d\omega_{l+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^l (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_l \right) \wedge \omega_{l+1} \\ &\quad + (-1)^l (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge d\omega_{l+1} \\ &= \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{l+1}. \end{aligned}$$

よって, $k = l + 1$ のときも等式は正しい.

したがって, 等式は正しい.

(2) (1) と $d^2 = 0$ より,

$$\begin{aligned} & d(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_{i-1} \wedge d(df_i) \wedge df_{i+1} \wedge \cdots \wedge df_k \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_{i-1} \wedge 0 \wedge df_{i+1} \wedge \cdots \wedge df_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. 外微分の性質より,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \theta) &= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta \\ &= 0 \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. $D^1(\mathbf{R}^n)$ の元は

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

と表すことができる.

よって, \mathbf{R}^n で定義された関数 f, g を用いて, $\omega = fdg$ と表されるときに示せばよい.
このとき,

$$\begin{aligned} (d\omega)(X, Y) &= (df \wedge dg)(X, Y) \\ &= (df)(X)(dg)(Y) - (df)(Y)(dg)(X) \\ &= (Xf)(Yg) - (Xg)(Yf). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) &= X((fdg)(Y)) - Y((fdg)(X)) - (fdg)([X, Y]) \\ &= X(fYg) - Y(fXg) - f[X, Y]g \\ &= (Xf)(Yg) + fX(Yg) - (Yf)(Xg) - fY(Xg) \\ &\quad - f(X(Yg) - Y(Xg)) \\ &= (Xf)(Yg) - (Xg)(Yf). \end{aligned}$$

よって,

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$