§9. 径数付き多様体

多様体とは Euclid 空間内の曲線や曲面を一般化したものである. ここでは, 一般の多様体と Euclid 空間内の曲線や曲面の中間的な位置付けである, Euclid 空間内の径数付き多様体について述べよう. 以下では位相に関する仮定や微分可能性について, はっきりと述べることにする. 例えば, C^r 級関数や C^r 級写像を考えるが, $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ である.

定義 D を $\mathbf{R}^m$ の開集合, f を D から $\mathbf{R}^n$ への C^r 級写像とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, f を m 次元 C^r 級径数付き多様体という.

(1) 任意の $p \in D$ に対して $\operatorname{rank} f'(p) = m$.
(2) f は D から $f(D)$ への全単射.
(3) f^{-1} は $f(D)$ から D への連続写像.

また, f は $m = 1$ のときは径数付き曲線, $m = 2$ のときは径数付き曲面, $m = n - 1$ のときは径数付き超曲面ともいう.

上の定義に現れた 3 つの条件について簡単に述べておこう.
まず, (1) は各点において m 次元の接空間が対応することを保証するための条件である.
また, (2) は f の像が自己交差することを除外するための条件である.
最後に, (3) は f が定義域から像への同相写像であることを保証するための条件である. 特に, D 上の点の収束列は f で写しても収束する. なお, $f(D)$ の位相は $\mathbf{R}^n$ の相対位相を考えている.
これらの条件について, $\mathbf{R}^n$ 内の曲線を例にもう少し考えてみよう.

例 (正則曲線)
$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

が径数付きであるという場合, I はまず開区間でなければならない.
また, (1) の条件をみたす曲線は正則であるというのであった. γ が正則ならば, 各 $t \in I$ において

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0$$

である.
このとき, $t_0 \in I$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線

$$l(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) \quad (t \in I)$$

を考えることができる.

例 (円)
平面曲線の例である原点中心, 半径 1 の円は

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

とおくことにより, 閉区間 $[0, 2\pi]$ から $\mathbf{R}^2$ への写像 γ として表すことができる.
しかし, この γ の定義域は開区間ではない.
そこで, 定義域を変更し,

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

とおくと, $\tilde{\gamma}$ は開区間で定義され, 像は同じ円である.

しかし,

$$\tilde{\gamma}(t+2\pi) = \tilde{\gamma}(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

だから, $\tilde{\gamma}$ は単射ではない.
よって, $\tilde{\gamma}$ は (2) の条件をみたさず, したがって逆写像 $\tilde{\gamma}^{-1}$ も考えることはできない.

例 (レムニスケート)
平面曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = \left(\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \right) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. γ を連珠形またはレムニスケートという.
このとき,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \left(\frac{(1+3t^2)(1+t^4) - (t+t^3)\cdot 4t^3}{(1+t^4)^2}, \frac{(1-3t^2)(1+t^4) - (t-t^3)\cdot 4t^3}{(1+t^4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{1+3t^2-3t^4-t^6}{(1+t^4)^2}, \frac{1-3t^2-3t^4+t^6}{(1+t^4)^2} \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$a(t) = 1+3t^2-3t^4-t^6, \ b(t) = 1-3t^2-3t^4+t^6$$

とおくと,

$$a(t)+b(t) = 2(1-3t^4), \ a(t)-b(t) = 2t^2(3-t^4).$$

よって, $\dot{\gamma}(t) = 0$ となる $t \in \mathbf{R}$ は存在しない.
したがって, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\operatorname{rank} \dot{\gamma}(t) = 1.$$

すなわち, (1) の条件がなりたつ.
また, $\gamma(t) = 0$ となるのは $t = 0$ のときのみで,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$$

と表しておくと, $t \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{\gamma_1(t) + \gamma_2(t)} &= \frac{t(1+t^2) - t(1-t^2)}{t(1+t^2) + t(1-t^2)} \\ &= t^2. \end{aligned}$$

よって,

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R} - \{0\})$$

とすると,

$$t_1 = \pm t_2.$$

更に,

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_1(t_2)$$

だから,

$$t_1 = t_2.$$

したがって, γ は全単射, すなわち (2) の条件がなりたつ.
しかし,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t)=\gamma(0)=0$$

だから, $\gamma(D)$ において 0 を含む十分小さい連結部分集合の γ^{-1} による像は成分を 3 つもつ.
よって, γ^{-1} は連続ではないから, (3) の条件はなりたたない.

曲面についても簡単に述べておこう.

例 (正則曲面)
D を uv 平面の領域とし, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面

$$p:D\to\mathbf{R}^3$$

を考えよう.
曲面 p が径数付きであるという場合, D はまず開集合でなければならない.
また, (1) の条件をみたす曲面は正則であるというのであった.
p が正則ならば, 各 $(u,v)\in D$ において

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix}=2$$

である.
このとき, $(u_0,v_0)\in D$ とすると, p の $p(u_0,v_0)$ における接平面

$$\{p(u_0,v_0)+p_u(u_0,v_0)(u-u_0)+p_v(u_0,v_0)(v-v_0)|(u,v)\in\mathbf{R}^2\}$$

を考えることができる.

次の例から分かるように, 高等学校の数学でも現れる関数のグラフは径数付き多様体の例をあたえる.

例 (写像のグラフ)

D を $\mathbf{R}^m$ の開集合, φ を D から $\mathbf{R}^n$ への C^r 級写像とし, D から $\mathbf{R}^{m+n}$ への C^r 級写像 f を

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(x_1,x_2,\ldots,x_m,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_m))\quad((x_1,x_2,\ldots,x_m)\in D)$$

により定める. すなわち, f は φ のグラフである.
このとき,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}f'&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}\end{pmatrix}\\ &=m.\end{aligned}$$

また, f が全単射であること, 更に f^{-1} が連続であることも容易に分かる.
よって, f は m 次元 C^r 級径数付き多様体である.

問題 9

1. $\mathbf{R}$ で定義された関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める. f は $\mathbf{R}$ で微分可能であるが, C^1 級ではないことを示せ.

2. S^1 を原点中心, 半径 1 の円とする. 開区間 I から S^1 への連続写像 γ で, 次の (1), (2) をみたすものは存在しないことを示せ. 特に, 円は径数付き曲線として表すことはできない.

(1) γ は I から S^1 への全単射.
(2) γ^{-1} は S^1 から I への連続写像.

3. $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を

$$S^n = \{(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = 1\}$$

により定める. S^n を n 次元単位球面という. 特に, $n = 1$ のときは S^1 は原点中心, 半径 1 の円である.

$p \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\mathbf{R}^{n+1}$ の 2 点 $(p, 0)$ と $(0, 1)$ を通る直線が S^n と交わる点を $f(p)$ とおく. このとき, f は $\mathbf{R}^n$ から $S^n - \{(0, 1)\}$ への全単射を定める.

(1) $f(p)$ を p の式で表せ.

(2) 任意の $p \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\operatorname{rank} f'(p) = n$$

であることを示せ.

特に, f は n 次元 C^∞ 級径数付き多様体となる. また, f の逆写像

$$f^{-1} : S^n - \{(0, 1)\} \to \mathbf{R}^n$$

を $(0, 1)$ を中心とする立体射影という.

(3) $y \in S^n - \{(0, 1)\}$ を

$$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1})$$

と表しておく. $f^{-1}(y)$ を $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ の式で表せ.

問題 9 の解答

1. まず, $x \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} \\
&= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} \\
&= \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

よって, f は $\mathbf{R}$ で微分可能.
しかし,

$$
\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}
$$

は存在しないから, f' は $x = 0$ で連続ではない.
したがって, f は $\mathbf{R}$ で C^1 級ではない.

2. (1), (2) をみたす γ が存在すると仮定する.
S^1 は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合だから, S^1 の連続写像 γ^{-1} による像 I は有界閉集合.
I は開区間だから, これは矛盾.
よって, γ は存在しない.

3. (1) $(p, 0)$ と $(0, 1)$ を通る直線の方程式は

$$
y = t((p, 0) - (0, 1)) + (0, 1) \quad (t \in \mathbf{R}),
$$

すなわち

$$
y = (tp, 1 - t)
$$

と表すことができる.
これを S^n を定義する式に代入すると,

$$
\|tp\|^2 + (1 - t)^2 = 1.
$$

これを解くと,

$$
t = 0, \frac{2}{\|p\|^2 + 1}.
$$

$t = 0$ のとき, $f(p) = (0, 1)$ となるから, $t \neq 0$.
よって,

$$
t = \frac{2}{\|p\|^2 + 1}.
$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(p) &= \left(\frac{2}{\|p\|^2+1} \cdot p, 1 - \frac{2}{\|p\|^2+1} \right) \\ &= \left(\frac{2p}{\|p\|^2+1}, \frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1} \right). \end{aligned}$$

(2) p を

$$p = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
$i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ とすると,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{2x_j}{\|p\|^2+1} = \frac{2\delta_{ij}}{\|p\|^2+1} - \frac{4x_i x_j}{\left(\|p\|^2+1\right)^2}.$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1} &= \frac{2x_i\left(\|p\|^2+1\right) - \left(\|p\|^2-1\right) \cdot 2x_i}{\left(\|p\|^2+1\right)^2} \\ &= \frac{4x_i}{\left(\|p\|^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

よって, 列に関する基本変形を行うと,

$$\begin{aligned} f'(p) &= \left(\left(\frac{2\delta_{ij}}{\|p\|^2+1} - \frac{4x_i x_j}{\left(\|p\|^2+1\right)^2} \right), \left(\frac{4x_i}{\left(\|p\|^2+1\right)^2} \right) \right) \\ &\xrightarrow[(j=1,2,3,\ldots,n)]{\text{第 } j \text{ 列} + \text{第 } (n+1) \text{ 列} \times x_j} \left(\left(\frac{2\delta_{ij}}{\|p\|^2+1} \right), \left(\frac{4x_i}{\left(\|p\|^2+1\right)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

したがって,

$$\operatorname{rank} f'(p) = n.$$

(3) (1) より,

$$y_i = \frac{2x_i}{\|p\|^2+1} \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \ y_{n+1} = \frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}.$$

よって,

$$\|p\|^2 = \frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}.$$

更に,

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2}\left(\|p\|^2+1\right) y_i \\ &= \frac{y_i}{1-y_{n+1}}. \end{aligned}$$

したがって,

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1-y_{n+1}}, \frac{y_2}{1-y_{n+1}}, \frac{y_3}{1-y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{1-y_{n+1}} \right).$$