§11. 曲面

ベクトル値関数や行列値関数と同様に, 微分形式をいくつか並べることにより, Euclid 空間や行列に値をとる微分形式を考えることができる.
例えば, $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f が

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

と 3 つの関数 f_1, f_2, f_3 を並べて表される場合, f の外微分 df は

$$df = (df_1, df_2, df_3)$$

により定めればよいのである.
微分形式をこのように用いることにより, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を記述してみよう.
$\mathbf{R}^3$ 内の曲面が (u, v) 平面の領域 D から $\mathbf{R}^3$ への写像

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

として表されているとする. なお, p は正則であるとする.
$\{e_1, e_2, e_3\}$ を p の正規直交標構とする. すなわち, e_1, e_2, e_3 は D から $\mathbf{R}^3$ への写像で, 次の (1)〜(3) をみたす.

(1) 任意の $(u, v) \in D$ に対して, $\{e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底.
(2) 任意の $(u, v) \in D$ に対して, $p(u, v) + e_1(u, v)$ および $p(u, v) + e_2(u, v)$ は $p(u, v)$ における接平面上にある.
(3) $e_3 = e_1 \times e_2$ で, 更に e_3 は p の単位法ベクトル.

このとき, p_u, p_v および e_1, e_2 はそれぞれ他方の 1 次結合で表すことができる. よって, D で定義された 2 次の正則行列に値をとる関数 A が存在し,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

となる.
したがって, p を外微分すると,

$$\begin{aligned} dp &= p_u du + p_v dv \\ &= (du, dv) \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \\ &= (du, dv) A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{R}^2$ に値をとる 1 次微分形式 $(du, dv)A$ を

$$(du, dv)A = (\theta^1, \theta^2)$$

と表すと,

$$dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$$

となる. なお, 添字の位置を上のように表すのには理由があるが, ここでは深入りしないことにする.

一方, e_1, e_2, e_3 の外微分 de_1, de_2, de_3 は $\mathbf{R}^3$ に値をとる 1 次微分形式であるから, e_1, e_2, e_3 の 1 次結合で表すことができる. ただし, このときに現れる係数は関数ではなく, 1 次微分形式である. よって, D で定義された 1 次微分形式 $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_3^3$ が存在し,

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

となる.
ここで, 最初に述べた正規直交標構の条件 (1) は

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

と表されることに注意しよう. この式の両辺を外微分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k e_k, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k e_k \right\rangle \\ &= \omega_i^j + \omega_j^i. \end{aligned}$$

すなわち, (ω_i^j) は実交代行列に値をとる 1 次微分形式で, 特に, $i = j$ の場合を考えると,

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$$

である. 実交代行列に値をとる 1 次微分形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ -\omega_2^1 & 0 \end{pmatrix}$$

を接続形式という.
また, A は正則行列に値をとる関数だから, θ^1, θ^2 の定義より, ω_1^3, ω_2^3 は θ^1, θ^2 の 1 次結合で表すことができる. よって, D で定義された関数 $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ が存在し,

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

となる.
行列値関数 (b_{ij}) を B とおく. このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理　K, H をそれぞれ p の Gauss 曲率, 平均曲率とすると,

$$K = |B|, \ H = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, B.$$

更に外微分の性質 $d^2 = 0$ を用いると, 次がなりたつ.

定理　次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $b_{12} = b_{21}$. すなわち B は実対称行列に値をとる.
(2) $d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1$, $d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2$ (第一構造方程式).

(3) $d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ (第二構造方程式または Gauss の方程式).
(4) D で定義された関数 $b_{11,1}, b_{11,2}, b_{12,1}, \ldots, b_{22,2}$ を

$$db_{ik} - \sum_{j=1}^{2} b_{ij}\omega_k^j - \sum_{j=1}^{2} b_{jk}\omega_i^j = \sum_{l=1}^{2} b_{ik,l}\theta^l \quad (i, k = 1, 2)$$

により定めると,

$$b_{ik,l} = b_{il,k} \quad (i, k, l = 1, 2) \quad \text{(Codazzi-Mainardi の方程式)}.$$

証明 (1), (2): $d^2 p = 0$ を計算すると,

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1,\ d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2,\ \theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0$$

となることが分かる.
更に, 第 3 式は $b_{12} = b_{21}$ と同値であることが分かる.
(3), (4): $i = 1, 2, 3$ とし, $d^2 e_i = 0$ を計算すると,

$$d\omega_2^1 = \omega_2^3 \wedge \omega_3^1,\ d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3,\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3$$

となることが分かる.
更に, 第 1 式と上の定理より,

$$\begin{aligned}
d\omega_2^1 &= \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 \\
&= -\omega_2^3 \wedge \omega_1^3 \\
&= -(b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \\
&= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= K\theta^1 \wedge \theta^2.
\end{aligned}$$

また, 第 2 式と第 3 式より, (4) がなりたつことが分かる. □

注意 各点において 1 次独立な 1 次微分形式 θ^1, θ^2 があたえられていると, それに対して第一構造方程式をみたす 1 次微分形式 ω_2^1, ω_1^2 が $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ という条件の下で, 一意的に存在することが分かる.
よって, 曲面が最初からあたえられていなくても, このような θ^1, θ^2 から Gauss の方程式を用いて, Gauss 曲率を定義することができる. これは $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の Gauss 曲率が第一基本形式のみに依存するという, Gauss の Theorema Egregium と深く関わる事実である.
また, θ^1, θ^2 を用いると, 曲面 p の第一基本形式と第二基本形式はそれぞれ

$$\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2,\ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\theta^i\theta^j$$

と表されることが分かる.
逆に, 関数 $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ が $b_{12} = b_{21}$ という条件の下で, Gauss の方程式と Codazzi-Mainardi の方程式をみたすとする. このとき, 上の 2 式をそれぞれ第一基本形式, 第二基本形式とする曲面が $\mathbf{R}^3$ の回転と平行移動の合成を除いて一意的に存在することが分かる. これが曲面論の基本定理である.

問題 11

1. $a > 0$ とする. 原点中心, 半径 a の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$
$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき,

$$\begin{cases} e_1 = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ e_2 = (-\sin v, \cos v, 0), \\ e_3 = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{cases}$$

とおくと, $\{e_1, e_2, e_3\}$ は p の正規直交標構である.

(1) 等式

$$dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$$

をみたす 1 次微分形式 θ^1, θ^2 を求めよ.

(2) $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_3^3$ を等式

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

をみたす 1 次微分形式とする. $\omega_2^1, \omega_1^3, \omega_2^3$ を求めよ.

(3) 等式

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

をみたす 2 次の行列に値をとる関数 B を求めよ.

(4) $|B|$ および $\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, B$ を求めよ.

2. D を (u, v) 平面の領域とし, E を D で定義された正の値をとる関数とする. このとき, 各点において 1 次独立な 1 次微分形式 θ^1, θ^2 を

$$\theta^1 = \sqrt{E} du,\ \theta^2 = \sqrt{E} dv$$

により定める.

(1) $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ という条件の下で, 第一構造方程式

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1,\ d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2$$

をみたす 1 次微分形式 ω_2^1 を求めよ.

(2) Gauss の方程式

$$d\omega_2^1 = K \theta^1 \wedge \theta^2$$

をみたす関数 K を求めよ.

問題 11 の解答

1. (1) まず,

$$p_u = ae_1,\ p_v = a(\sin u)e_2$$

だから,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned}(\theta^1, \theta^2) &= (du, dv) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\sin u \end{pmatrix} \\ &= (adu, a\sin u dv).\end{aligned}$$

したがって,

$$\theta^1 = adu,\ \theta^2 = a\sin u dv.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned} de_1 &= (d(\cos u\cos v), d(\cos u\sin v), d(-\sin u)) \\ &= (-\sin u\cos v du - \cos u\sin v dv, -\sin u\sin v du + \cos u\cos v dv, -\cos u du) \\ &= (\cos u dv)e_2 - (du)e_3. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= -\omega_1^2 \\ &= -\cos u dv. \end{aligned}$$

また,

$$\omega_1^3 = -du.$$

次に,

$$\begin{aligned} de_2 &= (d(-\sin v), d(\cos v), d0) \\ &= (-\cos v dv, -\sin v dv, 0) \\ &= -(\cos u dv)e_1 - (\sin u dv)e_3. \end{aligned}$$

よって,

$$\omega_2^3 = -\sin u dv.$$

(3) (1), (2) より,

$$\begin{pmatrix} -du \\ -\sin u dv \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} adu \\ a\sin u dv \end{pmatrix}.$$

よって,

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

(4) (3) より,

$$|B| = \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,B = -\frac{1}{a}.$$

2. (1) まず,

$$d\theta^1 = \left(\sqrt{E}\right)_v dv \wedge du.$$

よって,

$$\omega_2^1 = adu + bdv$$

と表しておくと, 第一構造方程式より,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{E}\right)_v dv \wedge du &= \sqrt{E}dv \wedge (adu + bdv)\\ &= a\sqrt{E}dv \wedge du.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}a &= \frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{E}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\log E\right)_v.\end{aligned}$$

同様に,

$$b = -\frac{1}{2}\left(\log E\right)_u.$$

したがって,

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2}\left(\log E\right)_v du - \frac{1}{2}\left(\log E\right)_u dv.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}d\omega_2^1 &= \frac{1}{2}\left(\log E\right)_{vv} dv \wedge du - \frac{1}{2}\left(\log E\right)_{uu} du \wedge dv\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(\log E\right)_{uu} + \left(\log E\right)_{vv}\right\} du \wedge dv.\end{aligned}$$

一方,

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = Edu \wedge dv.$$

よって,

$$K = -\frac{1}{2E}\left\{\left(\log E\right)_{uu} + \left(\log E\right)_{vv}\right\}.$$