

### §16. 多様体上の関数

$C^r$  級多様体に対しては, その上の  $C^s$  級関数というものを考えることができる. ただし,  $s \leq r$  である.

**定義**  $(M, \mathcal{S})$  を  $C^r$  級多様体,  $f$  を  $M$  で定義された関数とし,

$$s \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}, 0 \leq s \leq r \quad (*)$$

とする. 任意の  $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$  に対して  $\varphi(U)$  で定義された関数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbf{R}$$

が  $C^s$  級のとき,  $f$  は  $C^s$  級であるという.

$M$  上の  $C^s$  級関数全体の集合を  $C^s(M)$  と表す.

**注意** 上のように条件 (\*) を要請する理由は次の通りである.

$(M, \mathcal{S})$  を  $C^r$  級多様体とし,  $f$  を  $M$  で定義された関数とする.

$(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{S}$  とし,  $U \cap V \neq \emptyset$  であると仮定しよう.

このとき,  $\varphi(U \cap V)$  で定義された関数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbf{R}$$

および  $\psi(U \cap V)$  で定義された関数

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbf{R}$$

が定まる.

ここで,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1} &= f \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \varphi^{-1} \\ &= (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}). \end{aligned}$$

また,  $M$  は  $C^r$  級多様体だから,  $(U, \varphi)$  から  $(V, \psi)$  への座標変換  $\psi \circ \varphi^{-1}$  は  $C^r$  級である.

一般に  $C^r$  級写像と  $C^r$  級写像の合成は  $C^r$  級となるが, それ以上の微分可能性については何も保証されない. よって, 条件 (\*) を要請しないと,  $C^s$  級であるという定義が well-defined とはならないのである.

以下では特に断らない限り,  $C^r$  級多様体上の  $C^s$  級関数について考えるときは条件 (\*) はみたさられているとする.

§14において, 多様体に対する様々な概念は同値な座標近傍系に対しては不変な概念となる, ということを述べた.  $C^s$  級関数はそのような概念である.

**定理**  $M$  を位相多様体,  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  を  $M$  の同値な  $C^r$  級座標近傍系とする.  $f$  が  $\mathcal{S}$  に関して  $C^s$  級ならば,  $f$  は  $\mathcal{T}$  に関して  $C^s$  級である.

**例** §15において扱った, 径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体を考えよう.

$M$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分集合とし, 任意の  $p \in M$  に対して,  $p$  を含む  $M$  のある開集合  $U$  が  $m$  次元  $C^r$  級径数付き多様体

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$$

の像として表されているとする.

このとき,  $(U, f^{-1})$  は  $M$  の座標近傍で, このような座標近傍全体の集合を  $\mathcal{S}$  とおくと,  $(M, \mathcal{S})$  は  $m$  次元  $C^r$  級多様体となるのであった.

ここで,  $g \in C^s(\mathbf{R}^n)$  とし,  $\iota$  を  $M$  から  $\mathbf{R}^n$  への包含写像とする.

このとき,  $\iota$  と  $g$  の合成  $g \circ \iota$  は  $M$  で定義された関数である.

$(U, f^{-1})$  を上のような座標近傍とすると,  $f^{-1}(U) = D$  で定義された関数

$$(g \circ \iota) \circ (f^{-1})^{-1} : D \rightarrow \mathbf{R}$$

は  $C^s$  級である.

実際,

$$(g \circ \iota) \circ (f^{-1})^{-1} = g \circ f$$

で,  $g$  は  $C^s$  級,  $f$  は  $C^r$  級, 更に  $s$  は条件 (\*) をみたすからである.

よって,  $g \circ \iota \in C^s(M)$  である. すなわち,  $\mathbf{R}^n$  上の  $C^s$  級関数の  $M$  への制限は  $C^s$  級である.

$\mathbf{R}^n$  上の  $C^s$  級関数は非常に多く存在するから, 上の例においては  $M$  上の  $C^s$  級関数も非常に多く存在することになる.

しかし, 一般の  $C^r$  級多様体に対しても, その上の  $C^s$  級関数は非常に多く存在することが分かる. このことを示すには, 次の関数が基本となる.

$\mathbf{R}$  で定義された関数  $a$  を

$$a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

により定める.

$k = 0, 1, 2, \dots$  とすると,  $k$  に関する数学的帰納法を用いることにより,  $x > 0$  のとき,

$$a^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

と表されることが分かる. ただし,  $P_k\left(\frac{1}{x}\right)$  は  $\frac{1}{x}$  の多項式である.

実際,  $k = 0$  のときは

$$P_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

で,  $k = l$  のときに上のように表されると仮定すると,

$$\begin{aligned} a^{(l+1)}(x) &= (a^{(l)}(x))' \\ &= \left( P_l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} P_l'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_l\left(\frac{1}{x}\right) \left( \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left( -P_l'\left(\frac{1}{x}\right) + P_l\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となるからである.

ここで,  $n = 0, 1, 2, \dots$  のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^n}{e^y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,  $k$  に関する数学的帰納法を用いることにより,  $a^{(k)}(0) = 0$  であることが分かる. 例えば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x) - a(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{x} = 0$$

となるから,  $a'(0) = 0$  である.

$a$  が  $x \neq 0$  の範囲では何回でも微分可能であることと合わせると, 次がなりたつ.

**定理**  $a$  は  $C^\infty$  級.

上の  $a$  を用いて,  $\mathbf{R}$  で定義された関数  $b$  を

$$b(x) = \frac{a(x)}{a(x) + a(1-x)} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める.

**定理**  $b$  は  $C^\infty$  級で,

$$b(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad 0 < b(x) < 1 \quad (0 < x < 1), \quad b(x) = 1 \quad (x \geq 1).$$

更に,  $\varepsilon > 0$  を固定しておき,  $b$  を用いて,  $\mathbf{R}$  で定義された関数  $c$  を

$$c(x) = b\left(\frac{x}{\varepsilon} + 2\right) b\left(-\frac{x}{\varepsilon} + 2\right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める.

**定理**  $c$  は  $C^\infty$  級で,

$$c(x) = 0 \quad (|x| \geq 2\varepsilon), \quad 0 < c(x) < 1 \quad (\varepsilon < |x| < 2\varepsilon), \quad c(x) = 1 \quad (|x| \leq \varepsilon).$$

上の  $c$  を用いることにより, 次を示すことができる.

**定理**  $M$  を  $C^r$  級多様体とする.  $p \in M$  とし,  $U$  を  $p$  の開近傍とする. このとき,  $p$  の開近傍  $V$  と  $M$  上の  $C^r$  級関数  $f$  で, 次の (1), (2) をみたすものが存在する.

$$(1) \bar{V} \subset U.$$

$$(2) f(x) = 0 \quad (x \in M - U), \quad 0 \leq f(x) < 1 \quad (x \in U - \bar{V}), \quad f(x) = 1 \quad (x \in \bar{V}).$$

上の定理を用いると, 局所的に定義された  $C^r$  級関数を多様体上へ拡張することができる.

**定理**  $M$  を  $C^r$  級多様体とする.  $p \in M$  とし,  $U$  を  $p$  の開近傍,  $g$  を  $U$  で定義された  $C^r$  級関数とする. このとき,  $p$  の開近傍  $V$  と  $M$  上の  $C^r$  級関数  $\tilde{g}$  で, 次の (1), (2) をみたすものが存在する.

$$(1) \bar{V} \subset U.$$

$$(2) \tilde{g}(x) = 0 \quad (x \in M - U), \quad 0 \leq |\tilde{g}(x)| < |g(x)| \quad (x \in U - \bar{V}), \quad \tilde{g}(x) = g(x) \quad (x \in \bar{V}).$$

**証明**  $f$  を上の定理に現れた  $M$  上の  $C^r$  級関数とし,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x)g(x) & (x \in U), \\ 0 & (x \in M - U) \end{cases}$$

とおけばよい. □

## 問題 16

1.  $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$  とし,  $n$  次元球面

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

で定義された関数  $h_k$  を

$$h_k(x) = x_k \quad (x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in S^n)$$

により定める.  $h_k$  を  $k$  番目の高さ関数という.

§15において扱ったように,  $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$  とし,  $S^n$  の開集合  $U_i^+, U_i^-$  をそれぞれ

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$$

により定め,  $\mathbf{R}^n$  の開集合

$$D = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

から  $\mathbf{R}^{n+1}$  への写像  $f_i^+, f_i^-$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} f_i^+(y) &= (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n), \\ f_i^-(y) &= (y_1, \dots, y_{i-1}, -\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n) \end{aligned}$$

により定める. ただし,

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in D$$

である. このとき,  $\{(U_i^+, (f_i^+)^{-1}), (U_i^-, (f_i^-)^{-1})\}_{i=1, \dots, n+1}$  は  $S^n$  の  $C^\infty$  級座標近傍系である.  $(h_k \circ f_i^+)(y)$  および  $(h_k \circ f_i^-)(y)$  を求めよ.

2.  $k, l = 1, 2, 3, \dots, n+1$  とし,  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  に対して

$$f_{kl}(x) = \frac{x_k x_l}{\|x\|^2}$$

とおく.

(1)  $f_{kl}$  は  $n$  次元実射影空間  $\mathbf{R}P^n$  上の関数を定めることを示せ.

(2)  $f_{kl}$  が定める  $\mathbf{R}P^n$  上の関数も簡単のため  $f_{kl}$  と表すことにする.  $f_{kl} \in C^\infty(\mathbf{R}P^n)$  であることを示せ.

3.  $\mathbf{R}$  で定義された  $C^\infty$  級関数  $a$  を

$$a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

により定め,  $\mathbf{R}$  で定義された  $\mathbf{R}^2$  に値をとる  $C^\infty$  級関数  $f$  を

$$f(x) = \left( \tan\left(\frac{\pi}{2}a(x)\right), -\tan\left(\frac{\pi}{2}a(-x)\right) \right) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める.  $f$  の像を求めよ.

## 問題 16 の解答

1. まず,

$$\begin{aligned} (h_k \circ f_i^+)(y) &= (h_k) \left( y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n \right) \\ &= \begin{cases} \sqrt{1 - \|y\|^2} & (k = i), \\ y_k & (k \neq i). \end{cases} \end{aligned}$$

同様に,

$$(h_k \circ f_i^-)(y) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \|y\|^2} & (k = i), \\ y_k & (k \neq i). \end{cases}$$

2. (1)  $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  とすると,

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_{n+1}).$$

よって,

$$\begin{aligned} f_{kl}(\lambda x) &= \frac{(\lambda x_k)(\lambda x_l)}{\|\lambda x\|^2} \\ &= \frac{x_k x_l}{\|x\|^2} \\ &= f_{kl}(x). \end{aligned}$$

したがって,  $f_{kl}$  は  $\mathbf{R}P^n$  上の関数を定める.

(2)  $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$  とし,  $\mathbf{R}P^n$  の開集合  $U_i$  を

$$U_i = \{\pi(x) \mid x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, x_i \neq 0\}$$

により定める. ただし,

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}P^n$$

は自然な射影である.

更に,  $U_i$  上の局所座標系  $\varphi_i$  を

$$\varphi_i(p) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

$$(p = \pi(x) \in U_i, x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\})$$

により定める.

このとき,  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, n+1}$  は  $\mathbf{R}P^n$  の  $C^\infty$  級座標近傍系である.

ここで,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, x_i \neq 0$$

とすると,

$$\frac{x_k x_l}{\|x\|^2} = \frac{\frac{x_k}{x_i} \frac{x_l}{x_i}}{\left( \frac{x_1}{x_i} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_{i-1}}{x_i} \right)^2 + 1 + \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)^2}.$$

よって,  $y \in \mathbf{R}^n$  とすると,  $k, l < i$  のとき,

$$(f_{kl} \circ \varphi_i^{-1})(y) = \frac{y_k y_l}{\|y\|^2 + 1}.$$

したがって,  $f_{kl} \circ \varphi_i^{-1}$  は  $C^\infty$  級.

同様に, その他の場合も  $f_{kl} \circ \varphi_i^{-1}$  は  $C^\infty$  級.

以上より,  $f_{kl} \in C^\infty(\mathbf{R}P^n)$ .

3.  $a$  の性質より, 求める像は

$$f(\mathbf{R}) = \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) | y \leq 0\}.$$