§20. はめ込みと埋め込み

多様体の間の写像の中でも基本的なはめ込みと埋め込みについて述べよう. 以下に現れる C^r 級多様体においては $r \geq 1$ とする.
まず, はめ込みを定義しよう.

定義 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とする. 任意の $p \in M$ に対して p における f の微分

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

が単射なとき, f をはめ込みという.

注意 M から N へのはめ込みが存在するためには, 少なくとも M の次元は N の次元以下でなければならない.

例 (正則曲線, 正則曲面)
曲線論や曲面論において現れる, 区間や領域から Euclid 空間への写像としてあたえられる正則曲線や正則曲面ははめ込みである. 各点において微分が単射であるという条件が, 各点において接線や接平面が存在するという条件と同値であることに注意しよう.

例 径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体を考えよう.
M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし, 任意の $p \in M$ に対して, p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として表されているとする.
ι を M から $\mathbf{R}^n$ への包含写像とする. §17 において扱ったように, $\iota \in C^r(M, \mathbf{R}^n)$ であった.
ここで, f は m 次元 C^r 級径数付き多様体だから, 任意の $x \in D$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\,(\iota \circ f)'(x) &= \mathrm{rank}\, f'(x) \\ &= m. \end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{rank}\,(d\iota)_p = m.$$

座標近傍を用いると, 写像の微分の表現行列は Jacobi 行列となることを思い出そう.
したがって, $(d\iota)_p$ は単射となるから, ι ははめ込みである.

次の定理ははめ込みの局所的様子を記述するものである.

定理 M, N を C^r 級多様体, f を M から N へのはめ込みとし, $p \in M$ とする. このとき, $p \in U$ となる座標近傍 (U, φ) および $f(p) \in V$ となる座標近傍 (V, ψ) が存在し,

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

と表しておくと,

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \quad ((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in \varphi(U)).$$

上の定理の証明は省略するが, §3 において扱った逆写像定理が用いられることを注意しておこう.
次に, 埋め込みを定義する.

定義 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とする. f ははめ込みで M から $f(M)$ への同相写像を定めるとき, 埋め込みという. ただし, $f(M)$ の位相は相対位相である.

注意　定義より, 埋め込みは単射なはめ込みとなる.
埋め込みの定義を位相的な条件を課さずに, 単射なはめ込みとして定める場合もある.

例　M を上の 2 つめの例において現れた, 径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体とする.
このとき, M から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像 ι ははめ込みであった.
また, M の位相は相対位相を考えているから, ι は M から $\iota(M)$ への同相写像を定める.
よって, ι は埋め込みである.

例　$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2$ への写像を

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
このとき,

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

だから, f ははめ込みである.
しかし,

$$f(t + 2\pi) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

だから, f は単射ではない.
よって, f は埋め込みではない.

上の定理より, はめ込みは局所的には埋め込みとなる. すなわち, 次がなりたつ.

定理　M, N を C^r 級多様体, f を M から N へのはめ込みとする. このとき, 任意の $p \in M$ に対して p の開近傍 U が存在し, f の U への制限

$$f|_U : U \to N$$

は埋め込みとなる.

多様体は別の多様体の部分集合として表されることも多い. それが次に定める部分多様体というものである.

定義　N を n 次元 C^r 級多様体, M を N の部分集合とする. 任意の $p \in M$ に対して $p \in U$ となる N の座標近傍 (U, φ) が存在し,

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

と表しておくと

$$\varphi(M \cap U) = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \varphi(U) | x_{m+1} = x_{m+2} = x_{m+3} = \cdots = x_n = 0\}$$

となるとき, M を N の m 次元 C^r 級部分多様体という.

注意　M の m 次元 C^r 級部分多様体は m 次元 C^r 級多様体となることが分かる.
このときの部分多様体の位相は相対位相である.
また, 上の定義と同じ記号を用いると, $M \cap U$ は M における p の近傍で,

$$\psi = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

とおくと, ψ は $M \cap U$ 上の局所座標系となる.
特に, M から N への包含写像は埋め込みとなる.
埋め込みの定義と同様に, 部分多様体の定義においても位相的な条件を除き, 単射なはめ込みの像と定義する場合もある.

例 $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して $x - y \in \mathbf{Z}^n$ となるとき, $x \sim y$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は $\mathbf{R}^n$ 上の同値関係となる. 商集合を $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ と表すと, $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ は問題 15 において触れた n 次元トーラス T^n と C^∞ 級微分同相な C^∞ 級多様体となる. よって, $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ も n 次元トーラスという.
以下では $n = 2$ とする.
$(a, b) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$ を固定しておく. π を $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への自然な射影とし, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への写像 f を

$$f(t) = \pi(at, bt) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつことが分かる.

(1) f ははめ込み.
(2) a, b の比が有理数のとき, $f(\mathbf{R})$ は S^1 と C^∞ 級微分同相で $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の部分多様体.
(3) a, b の比が無理数のとき, f は単射. また, $f(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の稠密な部分集合で $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の部分多様体ではない.

例 $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とする. U を $\mathbf{R}^m$ の開集合, f を U で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる C^r 級関数とし,

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\}$$

とおく. M が空でなく, 任意の $x \in M$ に対して

$$\operatorname{rank} f'(x) = n$$

であると仮定する.
このとき, 問題 15 において触れたように, M は $(m - n)$ 次元 C^r 級多様体となることが分かる.
実は, M は $\mathbf{R}^m$ の部分多様体となる.
上の注意より, このことを用いて, S^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像が埋め込みであることを示すこともできる.
なお, $m = n$ のときは M は離散集合となるが, 離散集合を 0 次元多様体とみなすこともある.

上の例は次の定理の特別な場合である.

定理 M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とし, $q \in N$ とする. $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ で, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ に対して $(df)_p$ が全射ならば, $f^{-1}(q)$ は M の $(m - n)$ 次元 C^r 級部分多様体.

上の定理に現れた p を f の正則点といい, q を f の正則値という. 一方, 微分が全射とならない M の点を f の臨界点といい, 臨界点の像に属する N の点を f の臨界値という.
埋め込みによる像は部分多様体となる. すなわち, 次がなりたつ.

定理 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への埋め込みとする. このとき, $f(M)$ は N の部分多様体で, f は M から $f(M)$ への C^r 級微分同相写像を定める.

問題 20

1. $(M, \mathcal{S})$ を m 次元 C^r 級多様体, $(N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像, $M \times N$ を M と N の直積多様体とする. このとき, $M \times N$ の部分集合 Γ_f を

$$\Gamma_f = \{(p, f(p)) | p \in M\}$$

により定める. Γ_f を f のグラフという.

(1) $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$, $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ とし, $U \times V$ から $\mathbf{R}^{m+n}$ への写像 Φ を

$$\Phi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q) - (\psi \circ f)(p)) \quad ((p, q) \in U \times V)$$

により定めると, Φ は $U \times V$ 上の局所座標系となる.
Φ を

$$\Phi = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

と表しておく. $\Phi(\Gamma_f \cap (U \times V))$ を $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ を用いて表せ.
特に, Γ_f は $M \times N$ の m 次元 C^r 級部分多様体で, Γ_f から M への自然な射影は C^r 級微分同相写像となることが分かる.

(2) $M \times M$ の部分集合 Δ を

$$\Delta = \{(p, p) | p \in M\}$$

により定める. Δ は $M \times M$ の m 次元 C^r 級部分多様体であることを示せ.

2. 任意の $r \geq 1$ に対して, n 次元球面 S^n から n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ への C^r 級のはめ込みは存在しないことを示せ.

3. $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}$ への C^∞ 級写像を

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \quad (x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. f の正則点, 臨界点, 正則値, 臨界値を求めよ.

4. $M_n(\mathbf{R})$ を n 次の実正方行列全体の集合とする. 問題 15 において扱ったように, $M_n(\mathbf{R})$ は n^2 次元 C^∞ 級多様体となる.

(1) n 次の実対称行列全体の集合を $\mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$ と表すことにする. $\mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$ は C^∞ 級多様体となることを示し, その次元を求めよ.

(2) $M_n(\mathbf{R})$ から $\mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$ への写像 f を

$$f(X) = {}^t X X \quad (X \in M_n(\mathbf{R}))$$

により定める. このとき, f は C^∞ 級写像で, n 次の単位行列は f の正則値となることが分かる.
n 次の直交群 $\mathrm{O}(n)$ がコンパクト C^∞ 級多様体となることを示し, その次元を求めよ.
なお, $\mathrm{O}(n)$ の n 次の単位行列を含む連結成分は n 次の特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ となることが分かる. よって, $\mathrm{SO}(n)$ も $\mathrm{O}(n)$ と同じ次元のコンパクト C^∞ 級多様体となる. 更に, $\mathrm{SO}(2)$ は S^1 と C^∞ 級微分同相で, $\mathrm{SO}(3)$ は $\mathbf{R}P^3$ と C^∞ 級微分同相であることが分かる.

問題 20 の解答

1. (1) $p \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}\Phi(p, f(p)) &= (\varphi(p), \psi(f(p)) - (\psi \circ f)(p)) \\ &= (\varphi(p), 0).\end{aligned}$$

よって,

$$\Phi(\Gamma_f \cap (U \times V)) = \{(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \Phi(U \times V) | y_1 = \cdots = y_n = 0\}.$$

(2) M の上の恒等写像 1_M は M から M への C^r 級写像で,

$$\Delta = \Gamma_{1_M}.$$

よって, (1) より, Δ は $M \times M$ の m 次元 C^r 級部分多様体.

2. $f \in C^r(S^n, \mathbf{R}^n)$ とし,

$$f = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$$

と表しておく.
S^n はコンパクトだから, f_1 はある $p \in S^n$ において最大値をとる.
(U, φ) を $p \in U$ となる S^n の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
このとき,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

よって, この座標近傍に関する f の Jacobian は p において 0 となる.
したがって, f ははめ込みとはならない.

3. まず,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\operatorname{rank} f'(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

したがって, $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ のとき, x は f の正則点で, 0 は f の臨界点.
また, $t \in \mathbf{R} - \{0\}$ のとき, t は f の正則値で, 0 は f の臨界値.

4. (1) $\mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間だから, C^∞ 級多様体となる.
ここで,

$$\mathrm{Sym}(n, \mathbf{R}) = \{(x_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})) | x_{ij} = x_{ji} \ (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)\}$$

だから, ベクトル空間としての次元は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

よって, 多様体としての次元も $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) E を n 次の単位行列とすると,

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n)&=\{X\in M_n(\mathbf{R})|{}^tXX=E\}\\&=f^{-1}(E).\end{aligned}$$

E は f の正則値だから, $\mathrm{O}(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ の C^∞ 級部分多様体.
また, 上の式より, $\mathrm{O}(n)$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ の有界閉集合とみなすことができるから, コンパクト.
(1) より, $\mathrm{O}(n)$ の次元は

$$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$