§22. 微分形式

§7 において Euclid 空間上の微分形式について述べた．ベクトル場と同様に, 微分形式も多様体上で考えることができる．
まず, 1 次微分形式から考える．
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．ただし, $r \geq 1$ とする．$p \in M$ に対して, p における接空間 T_pM の双対空間 $(T_pM)^*$ を T_p^*M と表すことにする．T_p^*M を p における余接ベクトル空間または余接空間という．
各 $p \in M$ に対して $\omega_p \in T_p^*M$ があたえられているとする．この対応を ω と表し, M 上の 1 次微分形式という．
ω を M 上の 1 次微分形式, X を M 上のベクトル場とすると, $\omega(X)$ は M 上の関数を定める．

例 (関数の微分)
関数の微分は 1 次微分形式を定める．
M を C^r 級多様体とし, $f \in C^r(M)$ とする．このとき, §19 において扱ったように, 各 $p \in M$ に対して線形写像

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

が定まる．
ここで,

$$T_{f(p)}\mathbf{R} = \left\{ a \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)} \middle| \, a \in \mathbf{R} \right\} = \{a \in \mathbf{R}\}$$

と自然な同一視を行うと, $(df)_p \in T_p^*M$ である．
よって, df は M 上の 1 次微分形式を定める．
また, X を M 上のベクトル場とすると,

$$(df)(X) = Xf,$$

すなわち

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

が各 $p \in M$ に対してなりたつ．

$p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in S$ を $p \in U$ となるように選んでおく．φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ は U 上の C^r 級関数とみなすことができるから, これらの微分を考えることができる．
一方,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

は T_pM の基底となるのであった．
このとき, Euclid 空間上の微分形式の場合と同様に, 次がなりたつ．

定理　$\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ は $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ の双対基底．

関数の微分を座標近傍を用いて表してみよう．

上と同じ記号を用いると,

$$
\begin{aligned}
(df)_p &= \sum_{i=1}^{n} (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p.
\end{aligned}
$$

すなわち, U 上で

$$
df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{$*$}
$$

ここで, $(V, \psi) \in \mathcal{S}$ も $p \in V$ となるように選んでおき,

$$
\psi = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)
$$

と表しておく.
$j = 1, 2, 3, \dots, n$ とすると, $(*)$ より, $U \cap V$ 上で

$$
dy_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i.
$$

よって, 1 次微分形式の微分可能性については, 次のように定義すべきである.

定義 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体, ω を M 上の微分形式とし, $0 \leq s \leq r-1$ とする. 任意の $(U, \varphi) \in S$ に対して φ を

$$
\varphi = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
$$

と表しておき, ω を U 上で

$$
\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i
$$

と表しておく. $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ が U 上の C^s 級関数となるとき, ω は C^s 級であるという.

更に, 高次の微分形式を考えよう.
各 $p \in M$ に対して $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* M$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, M 上の k 次微分形式という.
ω を M 上の k 次微分形式, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ を M 上のベクトル場とすると, $\omega(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$ は M 上の関数を定める.
k 次微分形式の微分可能性についても, 1 次微分形式の場合と同様に定めることができる.
以下では C^∞ 級多様体上の C^∞ 級の微分形式を考えることにする.
M を C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級 k 次微分形式全体の集合を $D^k(M)$ と表すことにする.
Euclid 空間上の微分形式の場合と同様に, C^∞ 級微分形式に対して外積を定めることができる.
更に, 次の 2 つの定理がなりたつ.

定理 $\omega, \omega_1, \omega_2 \in D^k(M)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in D^l(M)$, $a, b \in C^\infty(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a\omega_1 \wedge \theta + b\omega_2 \wedge \theta$.
(2) $\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega \wedge \theta_1 + b\omega \wedge \theta_2$.

定理 $\omega \in D^k(M)$, $\theta \in D^l(M)$, $\psi \in D^r(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl}\theta \wedge \omega$.
(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$.

M, N を C^∞ 級多様体とし, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする.
このとき, 各 $p \in M$ に対して線形写像

$$(d\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

が定まる. よって, $\omega \in D^k(N)$ とすると, 各 $p \in M$ に対して $\omega_{\varphi(p)}$ の $(d\varphi)_p$ による引き戻し $(d\varphi)_p^*\omega_{\varphi(p)}$ が定まるが, これを単に $(\varphi^*\omega)_p$ と表す. $(\varphi^*\omega)_p$ は更に写像

$$\varphi^* : D^k(N) \to D^k(M)$$

を定めるが, これも引き戻しという.
また, $D^0(N)$ は $C^\infty(N)$ とみなすことができるが, 関数の引き戻しは写像の合成により定める.
すなわち, $f \in D^0(N)$ とすると,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

である. 問題 21 も参考にするとよい.
引き戻しと外積の定義より, 次がなりたつ.

定理 $\omega \in D^k(N), \theta \in D^l(N), \varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta).$$

更に, 多様体上の微分形式に対しても外微分を定義することができる.
$k \geq 1$ のとき, $\omega \in D^k(M)$ は座標近傍を用いると,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k} f_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表すことができる. このとき,

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k} df_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とおく. $d\omega$ を ω の外微分という.
上の定義は座標近傍に依存したものである. しかし, 多様体上の微分形式に対しても, 外微分は問題 7 において扱ったように, 座標近傍を用いることなく表すことができる. よって, 上の $d\omega$ は $D^{k+1}(M)$ の元を定める.
また, $f \in D^0(M)$ に対しては, 関数の微分として外微分 $df \in D^1(M)$ を定める.
次の 3 つの定理も Euclid 空間の場合と同様である.

定理 $\omega \in D^k(M), \theta \in D^l(M)$ とする. このとき,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$

定理 $d^2 = 0$. すなわち, 任意の $\omega \in D^k(M)$ に対して

$$d(d\omega) = 0.$$

定理 $\omega \in D^k(N), \varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

問題 22

1. 原点中心, 半径 1 の円 S^1 を

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

と表しておく. また, $N = (0, 1)$, $S = (0, -1)$ とおき, $\mathbf{R}$ から $S^1 - \{N\}$ および $S^1 - \{S\}$ への全単射 γ_N, γ_S を

$$\gamma_N(s) = \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1} \right) \ (s \in \mathbf{R}),\ \ \gamma_S(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right) \ (t \in \mathbf{R})$$

により定める. すなわち, $\gamma_N^{-1}, \gamma_S^{-1}$ はそれぞれ N, S を中心とする立体射影である. このとき, $\{(S^1 - \{N\}, \gamma_N^{-1}), (S^1 - \{S\}, \gamma_S^{-1})\}$ は S^1 の C^∞ 級座標近傍系となる. 更に, ι を S^1 から $\mathbf{R}^2$ への包含写像とし, $\omega \in D^1(\mathbf{R}^2)$ を

$$\omega = -ydx + xdy$$

により定める.

(1) 上の座標近傍系を用いて, $\iota^*\omega$ を表せ.

(2) S^1 から S^1 への C^∞ 級微分同相写像 φ を

$$\varphi(x, y) = (x, -y) \quad ((x, y) \in S^1)$$

により定める. $\varphi^*(\iota^*\omega) = -\iota^*\omega$ となることを示せ.

(3) $\theta \in D^1(S^1)$ が (2) の φ に対して $\varphi^*\theta = \theta$ をみたすとする. このとき, $\theta_{(\pm 1, 0)} = 0$ であることを示せ.

問題 22 の解答

1. (1) まず, 座標近傍 $(S^1 - \{N\}, \gamma_N^{-1})$ を用いると,

$$\begin{aligned}\gamma_N'(s) &= \left(\frac{2(s^2+1) - 2s\cdot 2s}{(s^2+1)^2}, \frac{2s(s^2+1)-(s^2-1)\cdot 2s}{(s^2+1)^2}\right)\\ &= \left(\frac{2(1-s^2)}{(s^2+1)^2}, \frac{4s}{(s^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}(\iota^*\omega)\left(\frac{d}{ds}\right) &= \omega\left((d\iota)\left(\frac{d}{ds}\right)\right)\\ &= \omega\left(\frac{d(\iota\circ\gamma_N)}{ds}\right)\\ &= \left(-\frac{s^2-1}{s^2+1}dx + \frac{2s}{s^2+1}dy\right)\left(\frac{2(1-s^2)}{(s^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{4s}{(s^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= \frac{2(s^2-1)^2}{(s^2+1)^3} + \frac{8s^2}{(s^2+1)^3}\\ &= \frac{2}{s^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\iota^*\omega = \frac{2}{s^2+1}ds.$$

次に, 座標近傍 $(S^1 - \{S\}, \gamma_S^{-1})$ を用いると,

$$\begin{aligned}\gamma_S'(t) &= \left(\frac{2(t^2+1) - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}, \frac{-2t(t^2+1)-(1-t^2)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\right)\\ &= \left(\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}, -\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}(\iota^*\omega)\left(\frac{d}{dt}\right) &= \omega\left((d\iota)\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\\ &= \omega\left(\frac{d(\iota\circ\gamma_S)}{dt}\right)\\ &= \left(-\frac{1-t^2}{t^2+1}dx + \frac{2t}{t^2+1}dy\right)\left(\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{4t}{(t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= -\frac{2(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} - \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}\\ &= -\frac{2}{t^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\iota^*\omega = -\frac{2}{t^2+1}dt.$$

(2) まず, φ の定義域を座標近傍 $(S^1 - \{N\}, \gamma_N^{-1})$ に制限して考える.
このとき, φ の値域の座標近傍として $(S^1 - \{S\}, \gamma_S^{-1})$ を選ぶことができる.

$s \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(\gamma_S^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_N)(s) = s$$

だから,

$$\begin{aligned}(\varphi^*(\iota^*\omega))\left(\frac{d}{ds}\right) &= (\iota^*\omega)\left((d\varphi)\left(\frac{d}{ds}\right)\right) \\ &= (\iota^*\omega)\left(\frac{d(\gamma_S^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_N)}{ds}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{s^2+1}dt\right)\left(\frac{d}{dt}\right) \\ &= -\frac{2}{s^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\varphi^*(\iota^*\omega) &= -\frac{2}{s^2+1}ds \\ &= -\iota^*\omega.\end{aligned}$$

同様に, φ の定義域を座標近傍 $(S^1 - \{S\}, \gamma_S^{-1})$ に制限して考えると,

$$\begin{aligned}\varphi^*(\iota^*\omega) &= \frac{2}{t^2+1}dt \\ &= -\iota^*\omega.\end{aligned}$$

したがって,

$$\varphi^*(\iota^*\omega) = -\iota^*\omega.$$

(3) (1) より, $\iota^*\omega$ は S^1 の各点において 0 とはならない.
よって, ある $f \in C^\infty(S^1)$ が存在し,

$$\theta = f\iota^*\omega.$$

仮定と (2) より,

$$\begin{aligned}(f\iota^*\omega)_p &= \theta_p \\ &= (\varphi^*\theta)_p \\ &= (\varphi^*(f\iota^*\omega))_p \\ &= (\varphi^*f)_p\varphi^*(\iota^*\omega)_p \\ &= (f \circ \varphi)(p)(-(\iota^*\omega)_p) \\ &= -f(\varphi(p))(\iota^*\omega)_p.\end{aligned}$$

ここで, $p = (\pm 1, 0)$ とすると, $\varphi(p) = p$ だから,

$$(f\iota^*\omega)_p = 0.$$