§1. 行列の定義

世の中に現れる様々な現象を数学的に取り扱おうとする場合, 最初に考えるべきことの１つは線形なもので近似することである. 行列とはそのような近似として現れる数学的対象の中でも最も典型的で重要なものである.
自然数 $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ および $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対し数 a_{ij} が対応しているとする. 行列 A とは mn 個の数 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ を長方形に

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と並べたものである. これを単に

$$A = (a_{ij})$$

とも表す. このとき, A を m 行 n 列の行列または $m \times n$ 行列という. また,

$$a_{ij}, \ (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}), \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ A の (i, j) 成分, 第 i 行, 第 j 列という.
2 つの行列 A と B は行と列の数がそれぞれ等しく, すべての成分が等しいとき,

$$A = B$$

と表し, A と B は等しいという. $A = B$ でないとき,

$$A \neq B$$

と表す.
なお, 1×1 行列は (a) と表されるが, 数 a と同一視することが多い.

例 2×3 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の $(1, 2)$ 成分は 2, 第 1 行は $(1, 2, 3)$, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

すべての成分が 0 の $m \times n$ 行列を $O_{m,n}$ または O と表し, 零行列という. 例えば,

$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とする．このとき, A を n 次の正方行列, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ を A の対角成分という．また, A は

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

のとき, 対角行列,

$$a_{ij} = 0 \ (i \neq j),\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn}$$

のとき, スカラー行列,

$$a_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

のとき, 上三角行列,

$$a_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

のとき, 下三角行列という．

例　2 次の正方行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表され, 対角成分は a と d.
2 次の対角行列, スカラー行列, 上三角行列, 下三角行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表される．

対角成分がすべて 1 の n 次のスカラー行列を E_n または E と書き, 単位行列という．例えば,

$$E_1 = (1) = 1,\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

単位行列は Kronecker の δ というものを用いて, 次のように表すことができる．まず, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対し 0 または 1 の値をとる δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

により定める．例えば, $i, j = 1, 2$ のとき,

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 1,\ \delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

で, $i, j = 1, 2, 3$ のとき,

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

である．Kronecker の δ を用いると, n 次の単位行列 E_n は $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ のとき,

$$E_n = (\delta_{ij})$$

と表すことができる．

$m \times n$ 行列 A の行と列を入れ替えて得られる $n \times m$ 行列を ${}^tA$ と表し, A の転置行列という. すなわち,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のとき,

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定義より,

$${}^t({}^tA) = A$$

がなりたつ.

例　2×3 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の転置行列は 3×2 行列

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

${}^tA = A$ がなりたつ正方行列 A を対称行列という.

命題　$A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列とする. A が対称行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

$1 \times n$ 行列を n 次の行ベクトル, $m \times 1$ 行列を m 次の列ベクトルという. 行ベクトル, 列ベクトルを合わせて数ベクトルという.

例　2 次, 3 次, 4 次の行ベクトルはそれぞれ

$$(a, b),\ (a, b, c),\ (a, b, c, d)$$

と表される.
2 次, 3 次, 4 次の列ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

と表される.

すべての成分が 0 の数ベクトルを 0 と表し, 零ベクトルという. 零ベクトルは零行列の特別な場合である.
零ベクトルも数の零も同じ記号 0 を用いるが, 文脈から判断して区別すること.

問題 1

1. A を (i,j) 成分が次の (1)〜(4) により定められる 3 次の正方行列とする. A をそれぞれ具体的に表せ.

(1) $a_{ij} = i + j$.

(2) $a_{ij} = ij$.

(3) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

(4) $a_{ij} = (-1)^{ij}$.

2. 次の (1), (2) の等式がなりたつような a, b, c の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 1 & 2ca \\ 1 & 1 & 1 \\ 2ca & 1 & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2bc & 1 \\ 2bc & c^2+a^2 & 2ab \\ 1 & 2ab & 1 \end{pmatrix}$.

3. 3 次の正方行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表しておく. A が対角行列, スカラー行列, 上三角行列, 下三角行列となるとき, A をそれぞれ具体的に表せ.

4. 次の (1)〜(4) の行列の (i,j) 成分を Kronecker の δ を用いて表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 次の (1), (2) の行列が対称行列となるような a の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a & a^2 \\ a^3 & a^4 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a^4 & a^5 & a^6 \\ a^7 & a^8 & a^9 \end{pmatrix}$.

問題 1 の解答

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (1) 各成分を比較すると,

$$a^2 + b^2 = 1,\ ab + bc = 0,\ b^2 + c^2 = 4.$$

第 2 式より, $b = 0$ または $c = -a$.
$c = -a$ のとき, 第 3 式より,

$$b^2 + a^2 = 4.$$

これは第 1 式に矛盾.
$b = 0$ のとき, 第 1 式と第 3 式より,

$$a = \pm 1,\ c = \pm 2 \quad (\text{複号任意}).$$

よって, 求める a, b, c の値は

$$a = \pm 1,\ b = 0,\ c = \pm 2 \quad (\text{複号任意}).$$

(2) 各成分を比較すると,

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = 2ab = 2bc = 2ca = 1.$$

これを解くと,

$$a = b = c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 対角行列, スカラー行列, 上三角行列, 下三角行列の順にそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

4. (1) $i\delta_{ij}$.
(2) $\delta_{i+1,j}$.
(3) $\delta_{i,j+1}$.

(4) $\delta_{i+1,j} + \delta_{i,j+1}$.

5. (1) $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分を比較すると,

$$a^2 = a^3.$$

これを解くと,

$$a = 0, 1.$$

(2) $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分, $(1,3)$ 成分と $(3,1)$ 成分, $(2,3)$ 成分と $(3,2)$ 成分をそれぞれ比較すると,

$$a^2 = a^4,\ a^3 = a^7,\ a^6 = a^8.$$

これを解くと,

$$a = 0, \pm 1.$$