§2. 行列の演算

行列は単に数を並べたものではなく, 和やスカラー倍, 更に積といった演算を考えることができる. なお, スカラーとは数のことである.
まず, 和とスカラー倍を定義しよう.
$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ をともに $m \times n$ 行列とする.
A と B の和を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

により定める. すなわち, $A + B$ は (i, j) 成分が $a_{ij} + b_{ij}$ の $m \times n$ 行列である.
更に, c を数とし, A の c 倍を

$$cA = (ca_{ij})$$

により定める. すなわち, cA は (i, j) 成分が ca_{ij} の $m \times n$ 行列である.
例えば,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 16 & 20 \\ 22 & 26 & 27 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と計算することができる.
和とスカラー倍に関して次がなりたつのはほとんど明らかであろう.

命題　A, B, C を $m \times n$ 行列, a, b を数とすると, 次の (1)〜(8) がなりたつ.
(1) $A + B = B + A$ (交換法則).
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則).
(3) $A + O = O + A = A$.
(4) $a(bA) = (ab)A$ (結合法則).
(5) $(a + b)A = aA + bA$ (分配法則).
(6) $a(A + B) = aA + aB$ (分配法則).
(7) $1A = A$.
(8) $0A = O$.
ただし, O は m 行 n 列の零行列である.

注意　(2) より, $(A + B) + C$ および $A + (B + C)$ はともに

$$A + B + C$$

と表しても構わない.
また,

$$A + (-1)A = O$$

がなりたつが, $(-1)A$ を $-A$ と表す. 更に, $A + (-B)$ を $A - B$ と表す.
これらの注意は通常の数の足し算と同様である.
なお, 上の (1)〜(8) の性質はベクトル空間というものがみたすべき性質である.

${}^tA = -A$ がなりたつ正方行列 A を反対称行列または交代行列という.
対称行列の場合と同様に, 次の命題はほとんど明らかであろう.

命題　$A=(a_{ij})$ を n 次の正方行列とする．A が交代行列であるための必要十分条件は

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,3,\dots,n).$$

特に, 交代行列の対角成分はすべて 0.

次に, 積を定義しよう．
$A=(a_{ij})$ を $l\times m$ 行列, $B=(b_{jk})$ を $m\times n$ 行列とする．このとき, $l\times n$ 行列 AB を

$$AB=(c_{ik}),\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}$$

により定める．すなわち, AB は (i,k) 成分が c_{ik} の行列である．A の列の数と B の行の数が等しいときに積 AB が定義されることに注意しよう．
例えば,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\cdot3+1\cdot4+2\cdot5\\1\cdot3+2\cdot4+0\cdot5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}14\\11\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(3,4)&=\begin{pmatrix}1\cdot3&1\cdot4\\2\cdot3&2\cdot4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3,4)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}&=(3\cdot1+4\cdot2)\\&=(11)\\&=11\end{aligned}$$

と計算することができる．
また, A と積の演算が可能な型の単位行列を掛けたものは A で, A と積の演算が可能な型の零行列を掛けたものは零行列となる．
行列の積を何故上のように定義するかを理解するには, 線形写像の合成写像に対する表現行列という概念が必要であるが, ここではこれ以上深入りしないことにする．
A,B をともに n 次の正方行列とすると, 2 つの積 AB および BA を考えることができる．この 2 つは必ずしも等しくなるとは限らないのが, 通常の数とは大きく異なることである．$AB=BA$ がなりたつとき, A と B は交換可能または可換であるという．
例えば,

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ は可換でない．

積の演算に関して次がなりたつ.
以下では和や積を考えるときは行列の型は演算が可能なものとする.

命題 A, B, C を行列とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $(AB)C = A(BC)$ (結合法則).
(2) $(A+B)C = AC + BC$ (分配法則).
(3) $A(B+C) = AB + AC$ (分配法則).
(4) a を数とすると, $(aA)B = A(aB) = a(AB)$.

注意 (1) より, $(AB)C$ および $A(BC)$ はともに

$$ABC$$

と表しても構わない. 通常の数の掛け算と同様である.

命題 n 次のスカラー行列は任意の n 次の正方行列と可換.

証明 A を n 次の正方行列とする.
n 次のスカラー行列は数 c を用いて cE と表されることに注意する.
上の命題の (4) より,

$$(cE)A = A(cE) = cA.$$

よって, cE は A と可換. □

上の注意より, 正方行列の巾乗を考えることができる. すなわち, A を正方行列とし, $n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき, A を n 回掛けたものを A^n と表し, これを A の n 乗という. ただし, $A^0 = E$ とする. 通常の数の掛け算と同様に, 指数法則

$$A^m A^n = A^{m+n},\ (A^m)^n = A^{mn}\ (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

がなりたつ.
通常の数では巾乗が 0 ならば, 元の数も零であるが, 行列の場合は必ずしもそうであるとは限らない. ある自然数 n に対し $A^n = O$ となるような正方行列 A を巾零行列という.
例えば,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= O\end{aligned}$$

だから, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は巾零行列である.

最後に, 転置行列と行列の演算との関係について述べておこう.

命題 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
(2) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
(3) a を数とすると, ${}^t(aA) = a{}^tA$.

(2) は積の順番が逆になるので, 注意が必要である.

問題 2

1. 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して等式

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

がなりたつことを示せ. なお, この等式を Caley-Hamilton の定理という.

2. 3次の正方行列 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は巾零行列であることを示せ.

3. 任意の正方行列は対称行列と交代行列の和で一意的に表されることを示せ.

4. n 次の正方行列 A, B に対して $[A,B] = AB - BA$ とおくと, 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ. なお, $[A,B]$ を A と B の交換子積という.
(1) $[A,B] = -[B,A]$.
(2) $[A,A] = O$.
(3) $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = O$. なお, この等式を Jacobi の恒等式という.

問題 2 の解答

1. 左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&A^2-(a+d)A+(ad-bc)E\\
&=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}\\
&=O.
\end{aligned}
$$

2. まず,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&=O.
\end{aligned}
$$

したがって, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は巾零行列.

3. 正方行列 A が対称行列 X と交代行列 Y を用いて,

$$A=X+Y$$

と表されると仮定すると,

$$
\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t(X+Y)\\
&={}^tX+{}^tY\\
&=X-Y.
\end{aligned}
$$

上の式と合わせると,

$$X=\frac{1}{2}(A+{}^tA),\ Y=\frac{1}{2}(A-{}^tA).$$

逆に, X, Y をこのように定めると,

$$
\begin{aligned}
{}^tX &= {}^t\left\{\frac{1}{2}(A+{}^tA)\right\}\\
&=\frac{1}{2}{}^t(A+{}^tA)\\
&=\frac{1}{2}({}^tA+{}^{tt}A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}({}^tA + A) \\
&= \frac{1}{2}(A + {}^tA) \\
&= X.
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
{}^tY &= {}^t\left\{\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right\} \\
&= \frac{1}{2}{}^t(A - {}^tA) \\
&= \frac{1}{2}({}^tA - {}^{tt}A) \\
&= \frac{1}{2}({}^tA - A) \\
&= -\frac{1}{2}(A - {}^tA) \\
&= -Y.
\end{aligned}
$$

よって, X は対称行列で, Y は交代行列.
したがって, 任意の正方行列は対称行列と交代行列の和で一意的に表される.

4. (1) 左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
[A, B] &= AB - BA \\
&= -(BA - AB) \\
&= -[B, A].
\end{aligned}
$$

(2) 左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
[A, A] &= AA - AA \\
&= O.
\end{aligned}
$$

(3) 左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \\
&\quad = [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B] \\
&\quad = (AB - BA)C - C(AB - BA) + (BC - CB)A - A(BC - CB) \\
&\qquad + (CA - AC)B - B(CA - AC) \\
&\quad = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB \\
&\qquad + CAB - ACB - BCA + BAC \\
&\quad = O.
\end{aligned}
$$