§3. 行列の分割

行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

は例えば

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようにブロックに分割することができる. ただし,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ A_{21} = (7, 8),\ A_{22} = 9$$

である. 行列をこのように分割することにより, 計算が容易になる場合がある.
まず, 2 つの同じ型の行列を同じように分割すれば, 和はブロック毎の和に帰着されることは明らかであろう. すなわち, A, B をともに $m \times n$ 行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

と各 A_{ij} と B_{ij} の行と列の数がそれぞれ等しくなるように分割しておくと,

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1q} + B_{1q} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2q} + B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} + B_{p1} & A_{p2} + B_{p2} & \cdots & A_{pq} + B_{pq} \end{pmatrix}$$

がなりたつ.
次に, 積について述べよう. A を $l \times m$ 行列, B を $m \times n$ 行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix}$$

と分割しておく. ただし, 各 A_{ij} の列と B_{jk} の行の数は等しいとする. このとき, 積 $A_{ij}B_{jk}$ が定められ,

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix},\ C_{ik} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}$$

がなりたつ.

特に, A を行ベクトル, B を列ベクトルに分割した場合を考えよう. すなわち,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix},\ a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}),\ B = (b_1, b_2, \ldots, b_n),\ b_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_lb_1 & a_lb_2 & \cdots & a_lb_n \end{pmatrix} = (Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_n) = \begin{pmatrix} a_1B \\ a_2B \\ \vdots \\ a_lB \end{pmatrix}$$

がなりたつ.

例　A_1, B_1 を m 次の正方行列, A_2, B_2 を n 次の正方行列とし, $(m+n)$ 次の正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} B_1A_1 & O \\ O & B_2A_2 \end{pmatrix}.$$

特に, A と B が可換であることと A_1 と B_1 および A_2 と B_2 がそれぞれ可換であることとは同値である.

例　A を $m \times n$ 行列とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & 2A \\ O & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & 2A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & 3A \\ O & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

更に, $k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

連立１次方程式は行列を用いて表すことができる．$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ を定数とし, m 個の方程式からなる n 個の未知変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ についての連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考えよう．$m \times n$ 行列 A, n 次の列ベクトル x, m 次の列ベクトル b をそれぞれ

$$A = (a_{ij}), \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

により定めると, 上の連立１次方程式は

$$Ax = b \tag{$*$}$$

と表される．このとき, A を係数行列という．
係数行列 A を

$$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

と列ベクトルに分割しておくと, $(*)$ は

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + \cdots + x_na_n = b$$

と表される．この式の左辺を $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の１次結合という．

例　n 次の列ベクトル $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める．すなわち, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して e_i は $(i, 1)$ 成分が 1 で, $i \neq j$ のとき $(j, 1)$ 成分が 0 の列ベクトルである．このとき, n 次の単位行列 E は

$$E = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$$

と分割することができる．また, 任意の n 次の列ベクトルは $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ の１次結合で表される．実際,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \cdots + x_ne_n$$

である．

問題 3

1. 3 次の正方行列 A, B を行列

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ A_{21} = (7, 8),\ A_{22} = 9,$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B_{21} = (0, 1),\ B_{22} = 0$$

を用いて,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

により定める. 上の分割を用いて積 AB を計算せよ.

2. 4 次の正方行列 I, J, K を

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. I, J, K を 2 次の正方行列を用いて分割することにより, 積 $I^2, J^2, K^2, IJ, JI,$ JK, KJ, KI, IK を計算せよ.

3. $A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{23}, B_{33}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}$ を n 次の正方行列, O を n 次の零行列とする. 3 つの行列の積

$$\begin{pmatrix} O & A_{12} & A_{13} \\ O & A_{22} & A_{23} \\ O & O & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ O & O & B_{23} \\ O & O & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ O & C_{22} & C_{23} \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

を計算せよ.

4. a, b を相異なる数とし, $(m+n)$ 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} aE_m & O \\ O & bE_n \end{pmatrix}$$

により定める. A と可換な $(m+n)$ 次の正方行列をすべて求めよ.

問題 3 の解答

1. まず,

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}(0,1)$$
$$=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\0&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix},$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}0$$
$$=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=(7,8)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+9(0,1)$$
$$=(8,7)+(0,9)$$
$$=(8,16),$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=(7,8)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+9\cdot 0$$
$$=8+0$$
$$=8.$$

よって,

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&4&2\\5&10&5\\8&16&8\end{pmatrix}.$$

2. 2 次の正方行列 A, B, C を

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

により定めると,

$$A^2=-E,\ B^2=E,\ C^2=E,$$

$$AB = C,\ BA = -C,\ BC = -A,\ CB = A,\ CA = B,\ AC = -B.$$

また,

$$I = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} O & B \\ -B & O \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} O & C \\ -C & O \end{pmatrix}.$$

よって,

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,$$

$$IJ = K,\ JI = -K,\ JK = I,\ KJ = -I,\ KI = J,\ IK = -J.$$

3. 直接計算すると,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} O & A_{12} & A_{13} \\ O & A_{22} & A_{23} \\ O & O & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ O & O & B_{23} \\ O & O & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ O & C_{22} & C_{23} \\ O & O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & O & A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ O & O & A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \\ O & O & A_{33}B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ O & C_{22} & C_{23} \\ O & O & O \end{pmatrix} \\ &= O_{3n,3n}. \end{aligned}$$

4. $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ をそれぞれ m 次の正方行列, $m \times n$ 行列, $n \times m$ 行列, n 次の正方行列とすると,

$$\begin{pmatrix} aE_m & O \\ O & bE_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_{11} & aX_{12} \\ bX_{21} & bX_{22} \end{pmatrix}.$$

また,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_m & O \\ O & bE_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_{11} & bX_{12} \\ aX_{21} & bX_{22} \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{pmatrix} aE_m & O \\ O & bE_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE_m & O \\ O & bE_n \end{pmatrix}$$

とすると,

$$aX_{12} = bX_{12},\ bX_{21} = aX_{21}.$$

$a \neq b$ だから, X_{12}, X_{21} は零行列.
したがって, A と可換な $(m+n)$ 次の正方行列は

$$\begin{pmatrix} X_{11} & O \\ O & X_{22} \end{pmatrix}.$$

ただし, X_{11}, X_{22} はそれぞれ任意の m 次および n 次の正方行列.