§4. 基本変形

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, b_3 \ldots, b_m$ を定数とし, m 個の方程式からなる n 個の未知変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ についての連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

は次の (1)〜(3) の式変形を行うことにより, 解くことができる.

(1) 1 つの式に 0 でない定数を掛ける.
(2) 2 つの式を入れ替える.
(3) 1 つの式に, 他の式に 0 でない定数を掛けたものを加える.

次の具体的な例で見てみよう.

例　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, & ① \\ x + 2y = 8 & ② \end{cases}$$

を考える.
①− ②× 2 より,

$$\begin{cases} -y = -3, & ③ \\ x + 2y = 8. & ② \end{cases}$$

③× (−1) より,

$$\begin{cases} y = 3, & ④ \\ x + 2y = 8. & ② \end{cases}$$

②− ④× 2 より,

$$\begin{cases} y = 3, & ④ \\ x = 2. & ⑤ \end{cases}$$

④と ⑤を入れ替えると,

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

再び連立 1 次方程式 $(*)$ に戻り, $m \times n$ 行列 A, n 次の列ベクトル x, m 次の列ベクトル b をそれぞれ

$$A = (a_{ij}),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

により定めると, $(*)$ は

$$Ax = b$$

と表される. §3 において扱ったように, A を係数行列というのであった. ここで, A に b を加えた $m \times (n+1)$ 行列を $(A|b)$ と表すことにする. $(A|b)$ を拡大係数行列という.
上の (1)〜(3) の式変形は拡大係数行列の変形に置き換えることができる. すなわち, 連立１次方程式は拡大係数行列に対する次の (1)〜(3) の変形を行うことにより, 解くことができる.

(1) 1 つの行に 0 でない定数を掛ける.

(2) 2 つの行を入れ替える.

(3) 1 つの行に, 他の行に 0 でない定数を掛けたものを加える.

この (1)〜(3) の変形を行に関する基本変形という. また, このようにして連立１次方程式を解く方法を掃き出し法という.
上の例に現れた連立１次方程式を掃き出し法により, 解いてみよう.

例　上の例において, 拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} \times (-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

よって,

$$x = 2,\ y = 3.$$

行列の基本変形は列に関しても行うことができる. すなわち, 次の (1)〜(3) の変形を列に関する基本変形という.

(1) 1 つの列に 0 でない定数を掛ける.

(2) 2 つの列を入れ替える.

(3) 1 つの列に, 他の列に 0 でない定数を掛けたものを加える.

行に関する基本変形と列に関する基本変形を合わせて単に基本変形という.
A を $m \times n$ 行列とする. A は基本変形を何回か行うことにより,

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

という形に変形することができる. このとき, r を A の階数といい,

$$r = \operatorname{rank} A$$

と表す. また, 上の形の行列を A の階数標準形という. なお, 階数および階数標準形は基本変形の仕方に依存しないことが分かる. 数学ではこのようなとき, 定義は well-defined であるという.
階数の定義より, 次がなりたつ.

定理　A を $m \times n$ 行列とすると,

$$\operatorname{rank} A \leq m,\ \operatorname{rank} A \leq n.$$

例　上の例において計算したように, 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ に対して行に関する基本変形を行うと, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に変形できる.
更に, 列に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列} - \text{第 2 列} \times 3]{\text{第 3 列} - \text{第 1 列} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, 階数標準形が得られ, 階数は 2 である.

なお, 階数を求めるだけならば, 階数標準形まで求める必要はない. 例えば, 4×5 行列に対して行に関する基本変形を行い, 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られたとすると, 階数は 3 である. ただし, $*$ は任意の数を表す. 上のような形の行列を階段行列という.

例　行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の階数を求める.
行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

$a = \pm 1$ のとき, 最後の行列は $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 階数は 1.
更に列に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 列} - \text{第 1 列} \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, 階数標準形が得られる.
$a \neq \pm 1$ のとき, 更に行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \frac{1}{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから, 階数は 2.
更に行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, 階数標準形が得られる.

問題 4

1. 次の (1)〜(4) の行列の階数標準形および階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

問題 4 の解答

1. (1) 基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 5]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 2 行} \times 4]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は 2.

(2) 基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第 3 列} - \text{第 1 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は 2.

(3) 基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

$a = 1$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列} - \text{第 1 列}]{\text{第 2 列} - \text{第 1 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は 1.

$a \neq 1$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \frac{1}{1-a}]{\text{第 2 行} \times \frac{1}{1-a}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times (1+a)]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times a}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 2+a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}.$$

$a=-2$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列}+\text{第 2 列}]{\text{第 3 列}+\text{第 1 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は 2.
$a \neq 1, -2$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行}\times\frac{1}{2+a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行}+\text{第 3 行}]{\text{第 1 行}-\text{第 3 行}\times(1+a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

階数は 3.
(4) 基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}-\text{第 2 行}\times a} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行}-\text{第 3 行}\times(1-a^2)]{\text{第 1 行}-\text{第 3 行}\times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -2a+a^3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(a^2-2) \end{pmatrix}.$$

$a=0, \pm\sqrt{2}$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列}-\text{第 2 列}\times a]{\text{第 3 列}-\text{第 1 列}\times(1-a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数は 2.
$a \neq 0, \pm\sqrt{2}$ のとき, 更に基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(a^2-2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行}\times\frac{1}{a(a^2-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行}-\text{第 3 行}\times a]{\text{第 1 行}-\text{第 3 行}\times(1-a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

階数は 3.