§5. 連立 1 次方程式

A を $m \times n$ 行列, b を m 次の列ベクトルとし, 連立 1 次方程式

$$Ax = b \tag{$*$}$$

を考えよう. $(*)$ の解が存在するかどうか, 更に解が一意的かどうかは係数行列 A および拡大係数行列 $(A|b)$ の階数の言葉で次のように述べることができる.

定理　$(*)$ の解が存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}\, A.$$

$(*)$ の解が一意的に存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}\, A = n.$$

証明　まず, $(A|b)$ の行に関する基本変形を行い, 必要ならば変数の入れ替えに相当する列の入れ替えを行うと, $(A|b)$ は

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_r & B & c \\ \hline O & O & d \end{array}\right)$$

と変形することができる. ただし, $r = \mathrm{rank}\, A$ で, B は $r \times (n-r)$ 行列, c は r 次の列ベクトル, d は $(m-r)$ 次の列ベクトル.
よって,

$$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}\, A, \mathrm{rank}\, A + 1.$$

$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}\, A + 1$ のとき, 上の行列は更に行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_r & B' & 0 \\ \hline & & 1 \\ & & 0 \\ O & O & \vdots \\ & & 0 \end{array}\right)$$

と変形することができる.
したがって, $(*)$ の解は存在しない.
$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}\, A$ のときは $d = 0$ となる.
したがって, $(*)$ の解は存在する.
更に, $(*)$ の解が一意的となるのは $(E_r|B)$ の部分が単位行列となるとき, すなわち $r = n$ のとき.
□

具体的な例を見てみよう.

例　連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

ここで, 第 2 行に注目すると, 解は存在しないことが分かる.
また, 係数行列の階数は 2 で, 拡大係数行列の階数は 3 である.

例　連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を考える.
拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

よって, 係数行列および拡大係数行列の階数はともに 2.
また,

$$\begin{cases} x_1 - 9x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

だから,

$$x_1 = -3 + 9c_1 - 2c_2,\ x_2 = 2 - 6c_1 + c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2.$$

ただし, c_1, c_2 は任意の定数.

注意　上の例の計算からも分かるように, 連立 1 次方程式 $(*)$ において,

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A < n$$

のとき, 解は $(n - \operatorname{rank} A)$ 個の任意の定数を用いて表される.

$(*)$ において, $b = 0$ の場合, すなわち

$$Ax = 0 \tag{$**$}$$

を考えよう. $(**)$ は斉次形または同次形であるという.
このとき,

$$\operatorname{rank}(A|0) = \operatorname{rank} A$$

だから, 上の定理より, $(**)$ の解は存在する.
$(**)$ を解く場合は係数行列の行に関する基本変形を行えばよいが, 明らかに $x = 0$ は解である.
$x = 0$ を自明な解とよぶ.

定理　次の (1), (2) が成り立つ.
(1) $(**)$ の解が自明な解のみであるための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} A = n.$$

(2) $m < n$ ならば, $(**)$ の自明でない解が存在する.

証明　(1): 上の定理より, 明らか.
(2): 階数の性質と仮定より,

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} A &\leq m \\ &< n. \end{aligned}$$

よって, (1) より, $(**)$ の自明でない解が存在する. □

次に示すように, $(*)$ の解が 1 つ見つかれば, その他のすべての解は対応する同次形の連立 1 次方程式 $(**)$ の解を, 見つけた解に加えることによって得られる. この事実は微分方程式への応用を考える際に重要である.

定理　x_0 が $(*)$ の 1 つの解ならば, $(*)$ のすべての解は $(**)$ の解 x_1 を用いて, $x_0 + x_1$ と表される.

証明　まず, x_1 を $(**)$ の解とすると,

$$\begin{aligned} A(x_0 + x_1) &= Ax_0 + Ax_1 \\ &= b + 0 \\ &= b. \end{aligned}$$

よって, $x_0 + x_1$ は $(*)$ の解.
逆に, x を $(*)$ の解とすると,

$$\begin{aligned} A(x - x_0) &= Ax - Ax_0 \\ &= b - b \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $x - x_0$ は $(**)$ の解だから, これを x_1 とおくと,

$$x = x_0 + x_1.$$

□

例　上の 2 つめの例において, 解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるが, 右辺の第 2 項, 第 3 項が対応する同次形の連立 1 次方程式の解である.

問題 5

1. 掃き出し法を用いることにより, 次の (1)〜(6) の連立１次方程式の解が存在するかどうかを調べ, 解が存在する場合は解を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

問題 5 の解答

1. (1) 拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 5]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} + \text{第 2 行} \times (-2)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

よって, 解は存在しない.

(2) 拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 5]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 2 行} \times 4]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

よって,

$$x_1 = -1, \ x_2 = 1.$$

(3) 拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 1 行} \times 2]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 3]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

よって,

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

だから,

$$x_1 = 1 + c, \ x_2 = -1 + c, \ x_3 = c.$$

ただし, c は任意の定数.

(4) 拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 3 行}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

よって, 解は存在しない.

(5) 係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 2 \\ \text{第 2 行} + \text{第 3 行}}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$
\begin{cases} x_1 - x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}
$$

だから,

$$
x_1 = c_1 + 10c_2,\ x_2 = -2c_1 - 7c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2.
$$

ただし, c_1, c_2 は任意の定数.

(6) 係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2 \\ \text{第 4 行} - \text{第 2 行} \times 3}}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 3 \\ \text{第 4 行} - \text{第 2 行} \times 2}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 4 行} + \text{第 3 行}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3 \\ \text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2}}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$
\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}
$$

だから,

$$
x_1 = c,\ x_2 = -c,\ c_3 = -c,\ x_4 = c.
$$

ただし, c は任意の定数.