§6. 正則行列

n 次の正方行列 A に対して

$$AB = BA = E$$

となる n 次の正方行列 B が存在するとき,

$$B = A^{-1}$$

と表し, これを A の逆行列という. このとき, A は正則であるという.
逆行列は存在するならば, 一意的である. 実際, B, C をともに A の逆行列とすると,

$$\begin{aligned} B &= BE \\ &= B(AC) \\ &= (BA)C \\ &= EC \\ &= C \end{aligned}$$

となるからである.

例　2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考える.
A が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ で, $ad - bc \neq 0$ のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であることが分かる.

なお, 逆行列は上のように定義したが, 実は次がなりたつ.

定理　A を n 次の正方行列とする. $AB = E$ または $BA = E$ となる n 次の正方行列 B が存在するならば, B は A の逆行列.

正方行列が正則であるという性質はいろいろな条件に置き替えることができる.

定理　A を n 次の正方行列とすると, 次の (1)〜(5) は同値.

(1) A は正則.
(2) $\operatorname{rank} A = n$.
(3) A の階数標準形は単位行列.
(4) 同次形の連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解は自明な解のみ.
(5) 任意の n 次の列ベクトル b に対して, 連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解が一意的に存在する.

証明　(1)⇒(4) および (5)⇒(1) のみ示す.
(1)⇒(4): 仮定より, A の逆行列 A^{-1} が存在する.
x が同次形の連立 1 次方程式

$$Ax = 0$$

の解であるとし, この式の両辺に左から A^{-1} を掛けると,

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0.$$

左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} A^{-1}(Ax) &= (A^{-1}A)x \\ &= Ex \\ &= x. \end{aligned}$$

また, 右辺は零ベクトル.
よって,

$$x = 0.$$

すなわち, x は自明な解.
(5)⇒(1): n 次の列ベクトル $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める.
仮定より, n 個の連立 1 次方程式

$$Ax = e_1,\ Ax = e_2,\ Ax = e_3,\ \ldots,\ Ax = e_n$$

の解

$$x = c_1,\ x = c_2,\ x = c_3,\ \ldots,\ x = c_n$$

がそれぞれ存在する.
このとき,

$$\begin{aligned} A(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) &= (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n) \\ &= E. \end{aligned}$$

よって, 上の定理より,

$$A^{-1} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n).$$

したがって, A は正則. □

注意　(5)⇒(1) の証明において, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $(A|e_i)$ は行に関する基本変形を行うと, $(E|c_i)$ と変形される. よって, $(A|E)$ は行に関する基本変形を行うと, $(E|A^{-1})$ と変形される.

例　3 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める.

$(A|E)$ の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} + \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

よって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

最後に, 正則行列に関する基本的事実について述べておこう.

定理　A, B を n 次の正則行列とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(2) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明　(1): 逆行列の定義より,

$$AA^{-1} = E$$

だから, 明らか.
(2): まず,

$$AA^{-1} = E$$

だから, 両辺の転置行列を考えると,

$${}^t(AA^{-1}) = {}^tE.$$

よって,

$${}^t(A^{-1}){}^tA = E.$$

したがって,

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

(3): 直接計算すると,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E.$$

よって,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

□

注意　(2) より, $({}^tA)^{-1}$ および ${}^t(A^{-1})$ はともに ${}^tA^{-1}$ と表しても構わない.

問題 6

1. 次の (1), (2) の行列は正則である. 逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. n 次の正方行列 A_{11}, A_{12}, A_{22} を用いて, $2n$ 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

により定める. A_{11} および A_{22} がともに正則ならば, A は正則であることを示し, 更に A の逆行列を求めよ.

3. A を (i,j) 成分が a_{ij} の n 次の正方行列とする. 任意の $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して

$$|a_{ij}| < \frac{1}{n}$$

がなりたつならば, $E + A$ は正則であることを示せ.

問題 6 の解答

1. (1) 行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times a} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times c]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times (b-ac)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行}]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. n 次の正方行列 $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ を用いて, $2n$ 次の正方行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} & A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}X_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $AX = E$ とすると,

$$A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} = E,\ A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} = O,\ A_{22}X_{21} = O,\ A_{22}X_{22} = E.$$

A_{11}, A_{22} は正則だから, これを解くと,

$$X_{11} = A_{11}^{-1},\ X_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1},\ X_{21} = O,\ X_{22} = A_{22}^{-1}.$$

よって, A は正則で,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. $E + A$ が正則であることを示すには, 同次形の連立 1 次方程式

$$(E + A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \tag{$*$}$$

の解が自明な解のみであることを示せばよい.
このことを背理法により示す.
$(*)$ の解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して, $|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n|$ のうち最大のものを $|x_{i_0}|$ とする.
ここで, $|x_{i_0}| > 0$ と仮定する.
$(*)$ の第 i_0 行に注目すると,

$$x_{i_0} + \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = 0$$

だから,

$$\begin{aligned} |x_{i_0}| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}||x_j| \\ &< \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ &\leq |x_{i_0}|. \end{aligned}$$

これは矛盾.
よって, $|x_{i_0}| = 0$ だから,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0.$$

すなわち, $(*)$ の解は自明な解のみ.