§7. 置換

行列式を定義するための準備として, 置換について述べる. 集合や写像の言葉を使うので, 少々難しく感じるかもしれないが, 実際に行列式の計算を行う際は置換そのものを積極的に用いることはあまりないので, それほど神経質にならなくともよい.
自然数 n を固定しておき, σ を集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ から同じ集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ への１対１の写像とする. すなわち, 各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $\sigma(i)$ は $1, 2, 3, \ldots, n$ の何れかで,

$$\sigma(i) = \sigma(j) \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ならば, $i = j$ であるとする. σ を n 文字の置換という.
$\sigma(i) = k_i$ のとき,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す. ただし, 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

などとも表す.
各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ を i 自身へ写す n 文字の置換を単位置換または恒等置換といい, ε と表すことにする. すなわち,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で, ε は恒等写像という写像である.
σ および τ をともに n 文字の置換とすると, n 文字の置換 $\sigma\tau$ を

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

により定めることができる. すなわち, $\sigma\tau$ は τ と σ の合成写像という写像である. $\sigma\tau$ を σ と τ の積という.
置換の積に関して結合律がなりたつ. すなわち, σ, τ, ρ を n 文字の置換とすると,

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

がなりたつ. よって, $(\sigma\tau)\rho$ および $\sigma(\tau\rho)$ はともに $\sigma\tau\rho$ と表しても構わない.

例　4 文字の置換 σ, τ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) \\ &= \sigma(3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

同様に,

$$(\sigma\tau)(2) = 3,\ (\sigma\tau)(3) = 2,\ (\sigma\tau)(4) = 4.$$

よって,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

σ を n 文字の置換とすると,

$$\sigma\tau = \tau\sigma = \varepsilon$$

となる n 文字の置換 τ が存在する. τ を σ の逆置換といい, σ^{-1} と表す. すなわち,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

のとき,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で, σ^{-1} は σ の逆写像という写像である.
集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ の部分集合 $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r\}$ に対して n 文字の置換 $(k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r)$ を

$$(k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$$

により定める. $(k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r)$ を巡回置換という.

定理　任意の置換は巡回置換の積で表すことができる.

上の定理を具体的な例で確認してみよう.

例　7 文字の置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\sigma(1) = 4,\ \sigma(4) = 2,\ \sigma(2) = 1.$$

これを

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

と表すことにする.
また,

$$3 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 3.$$

よって,

$$\sigma = (3\ 5\ 6\ 7)(1\ 4\ 2).$$

$(k_1\ k_2)$ と表される巡回置換を互換という.

定理　任意の置換は互換の積で表すことができる.

証明　上の定理および

$$(k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1\ k_4)(k_1\ k_3)(k_1\ k_2)$$

がなりたつことを用いればよい. □

置換 σ が m 個の互換の積で表されるとする. このとき,

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^m$$

とおき, これを σ の符号という. ただし, $\mathrm{sgn}\varepsilon = 1$ とする. この定義は well-defined である. すなわち, 次がなりたつことが分かる.

定理 置換の符号は互換の積の表し方に依存しない.

例 上の例における 7 文字の置換 σ を考えると,

$$(3\ 5\ 6\ 7) = (3\ 7)(3\ 6)(3\ 5),\ (1\ 4\ 2) = (1\ 2)(1\ 4).$$

よって,

$$\sigma = (3\ 7)(3\ 6)(3\ 5)(1\ 2)(1\ 4).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}\,\sigma &= (-1)^5\\ &= -1.\end{aligned}$$

定理 σ, τ を n 文字の置換とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (\mathrm{sgn}\,\sigma)(\mathrm{sgn}\,\tau)$.
(2) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,\sigma$.

証明 (1): σ, τ がそれぞれ l 個, m 個の互換の積で表されるとすると, $\sigma\tau$ は $(l+m)$ 個の互換の積で表される.
よって, (1) がなりたつ.
(2): (1) において, $\tau = \sigma^{-1}$ とおけばよい. □

n 文字の置換全体を S_n と表すことにする. S_n の元の個数は $n!$ である.
置換 σ は $\mathrm{sgn}\,\sigma = 1$ のとき, 偶置換, $\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ のとき, 奇置換という. $n \geq 2$ のとき, 偶置換および奇置換の個数はともに $\dfrac{n!}{2}$ であることが分かる.
例えば, $n = 1$ のとき,

$$S_1 = \{\varepsilon\}$$

で, ε は偶置換.
$n = 2$ のとき,

$$S_2 = \{\varepsilon, (1\ 2)\}$$

で, 偶置換は ε, 奇置換は $(1\ 2)$.
$n = 3$ のとき,

$$S_3 = \{\varepsilon, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

で, 偶置換は

$$\varepsilon, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2),$$

奇置換は

$$(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3).$$

問題 7

1. $\sigma, \tau \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める. 積 $\sigma\tau$ および $\tau\sigma$ を求めよ.

2. $\sigma, \tau \in S_4$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

により定める. 積 $\sigma\tau$ および $\tau\sigma$ を求めよ.

3. 次の (1), (2) の置換 σ の符号を求めよ.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\sigma \in S_n$ とすると,

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \tag{$*$}$$

がなりたつことが分かる. ただし, $\prod$ は積を表す記号で, $\prod\limits_{1 \le i < j \le n}$ は $1 \le i < j \le n$ をみたすすべての組 (i, j) にわたって積を考えることを意味する.

$(*)$ を用いることにより, 次の (1)〜(5) により定められる S_4 の元 σ に対し, $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ.

(1) $\sigma = \varepsilon$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(4) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(5) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

問題 7 の解答

1. まず,

$$(\sigma\tau)(1) = 2,\ (\sigma\tau)(2) = 1,\ (\sigma\tau)(3) = 3$$

だから,

$$\begin{aligned}\sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (1\ 2).\end{aligned}$$

また,

$$(\tau\sigma)(1) = 1,\ (\tau\sigma)(2) = 3,\ (\tau\sigma)(3) = 2$$

だから,

$$\begin{aligned}\tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (2\ 3).\end{aligned}$$

2. まず,

$$(\sigma\tau)(1) = 4,\ (\sigma\tau)(2) = 3,\ (\sigma\tau)(3) = 2,\ (\sigma\tau)(4) = 1$$

だから,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

また,

$$(\tau\sigma)(1) = 2,\ (\tau\sigma)(2) = 1,\ (\tau\sigma)(3) = 4,\ (\tau\sigma)(4) = 3$$

だから,

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (1) まず,

$$1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 3 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 5 \mapsto 2$$

だから,

$$\begin{aligned}\sigma &= (2\ 5)(1\ 4\ 6\ 7\ 3) \\ &= (2\ 5)(1\ 3)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 4).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\sigma &= (-1)^5 \\ &= -1.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$1 \mapsto 7 \mapsto 3 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 2,\ 6 \mapsto 6$$

だから,

$$
\begin{aligned}
\sigma &= (2\ 4\ 5)(1\ 7\ 3) \\
&= (2\ 5)(2\ 4)(1\ 3)(1\ 7).
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= (-1)^4 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

4. (1) $(*)$ より,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3} \\
&= \frac{2-1}{2-1}\frac{3-1}{3-1}\frac{4-1}{4-1}\frac{3-2}{3-2}\frac{4-2}{4-2}\frac{4-3}{4-3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(2) $(*)$ より,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3} \\
&= \frac{1-2}{2-1}\frac{3-2}{3-1}\frac{4-2}{4-1}\frac{3-1}{3-2}\frac{4-1}{4-2}\frac{4-3}{4-3} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

(3) $(*)$ より,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3} \\
&= \frac{3-2}{2-1}\frac{1-2}{3-1}\frac{4-2}{4-1}\frac{1-3}{3-2}\frac{4-3}{4-2}\frac{4-1}{4-3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(4) $(*)$ より,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3} \\
&= \frac{1-2}{2-1}\frac{4-2}{3-1}\frac{3-2}{4-1}\frac{4-1}{3-2}\frac{3-1}{4-2}\frac{3-4}{4-3} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(5) $(*)$ より,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\sigma &= \frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3} \\
&= \frac{3-2}{2-1}\frac{4-2}{3-1}\frac{1-2}{4-1}\frac{4-3}{3-2}\frac{1-3}{4-2}\frac{1-4}{4-3} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$