§8. 行列式

正方行列に対して行列式という数を対応させることができる. 行列式は正方行列, より一般的には線形変換というものの性質を調べる上でとても重要なものである.
n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

とおく. すなわち, $|A|$ はすべての n 文字の置換 σ にわたって $(\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ を加えたものである. $|A|$ を A の n 次の行列式または単に行列式という. $|A|$ は

$$\det A,\ |a_{ij}|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

などとも表す.
1 次の行列式は

$$S_1 = \{\varepsilon\}$$

だから,

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= (\operatorname{sgn}\varepsilon) a_{11} \\ &= a_{11}. \end{aligned}$$

2 次の行列式は

$$S_2 = \{\varepsilon, (1\ 2)\}$$

だから,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (\operatorname{sgn}\varepsilon) a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(1\ 2) a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

3 次の行列式は

$$S_3 = \{\varepsilon, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

だから,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (\operatorname{sgn}\varepsilon) a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(1\ 2) a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}(1\ 3) a_{13}a_{22}a_{31} + \operatorname{sgn}(2\ 3) a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(1\ 2\ 3) a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}(1\ 3\ 2) a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

2 次および 3 次の行列式は成分を右下がりに選んで掛けるときは $+$ を, 左下がりに選んで掛けるときは $-$ をそれぞれ付けることにより得られると覚えればよい. これを Sarrus の方法という.
4 次以上の行列式については Sarrus の方法はなりたたないので注意が必要である.

以下では行列式の基本的性質について述べよう.

定理 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

特に, 上三角行列の行列式は対角成分の積.
更に, 単位行列の行列式は 1.

定理 次の (1)〜(3) がなりたつ.

(1) 第 j 列が 2 つの列ベクトルの和となる正方行列の行列式は, 他の列は同じで第 j 列をそれぞれの列ベクトルに置き替えた正方行列の行列式の和に等しい. すなわち, $a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, c_j$, $a_{j+1}, \ldots, a_n$, を n 次の列ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} &\left| \ a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j + c_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right| \\ &\quad = \left| \ a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right| + \left| \ a_1, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right|. \end{aligned}$$

(2) 1 つの列を c 倍すると, 行列式は c 倍になる. すなわち, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ を n 次の列ベクトルとすると,

$$\left| \ a_1, \ldots, a_{j-1}, ca_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right| = c \left| \ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ \right|.$$

(3) 2 つの列を入れ替えると, 行列式の符号は変わる. すなわち, $i < j$ で, $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots$, $a_{j-1}, c_j, a_{j+1}, \ldots, a_n$ を n 次の列ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} &\left| \ a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right| \\ &\quad = -\left| \ a_1, \ldots, a_{i-1}, c_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b_i, a_{j+1}, \ldots, a_n \ \right|. \end{aligned}$$

特に, 2 つの列が等しい正方行列の行列式は 0.

上の (1), (2) を多重線形性, また (3) を交代性という. 実は行列式は単位行列の行列式が 1 であることと上の (1)〜(3) によって特徴付けられることが分かる. すなわち, 正方行列から数への対応で, 多重線形性と交代性がなりたち, 単位行列の値が 1 となるものは行列式に限る.

定理 A を正方行列とすると, $|{}^tA| = |A|$.

上の定理より, 行列式の多重線形性と交代性は行に関してもなりたつ.

定理 次の (1)〜(3) がなりたつ.

(1) 第 i 行が 2 つの行ベクトルの和となる正方行列の行列式は, 他の行は同じで第 i 行をそれぞれの行ベクトルに置き替えた正方行列の行列式の和に等しい.

(2) 1 つの行を c 倍すると, 行列式は c 倍になる.

(3) 2 つの行を入れ替えると, 行列式の符号は変わる.
特に, 2 つの行が等しい正方行列の行列式は 0.

また, 上三角行列の場合と同様に, 下三角行列の行列式も対角成分の積となる.
更に, 次がなりたつ.

定理　1 つの列に他の列の何倍かを加えても, 行列式は変わらない. すなわち, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ を n 次の列ベクトル, c を数とすると, $i \neq j$ のとき,

$$\left| \; a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + c a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n \; \right| = \left| \; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \; \right|.$$

1 つの行に他の行の何倍かを加えても, 行列式は変わらない.

最初に述べた定理は次のように一般化することができる.

定理　A を m 次の正方行列, B を $m \times n$ 行列, C を $n \times m$ 行列, D を n 次の正方行列とすると,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|.$$

例　A, B を n 次の正方行列とすると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= |A+B||A-B|. \end{aligned}$$

ただし, 最初の等式では各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して第 i 行に第 $(n+i)$ 行を加え, 2 つめの等式では各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して第 $(n+i)$ 列から第 i 列を引き, 最後の等式では上の定理を用いた.

定理　A, B を n 次の正方行列とすると,

$$|AB| = |A||B|.$$

特に,

$$|AB| = |BA|.$$

証明　上の定理より,

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

多重線形性と交代性および上の定理を用いて, 左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & O+AB \\ -E & B+(-E)B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |-E||AB| \\ &= (-1)^n (-1)^n |AB| \\ &= |AB|. \end{aligned}$$

よって,

$$|AB| = |A||B|.$$

□

問題 8

1. 次の (1)〜(4) の行列式を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

2. 奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを示せ.

3. A を n 次の正方行列, P を n 次の正則行列とすると,

$$|P^{-1}AP| = |A|$$

がなりたつことを示せ.

4. A を正則行列とすると,

$$|A| \neq 0,\ |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

がなりたつことを示せ.

5. 巾零行列の行列式は 0 であることを示せ.

6. 2 次の行列式を用いて, 等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を示せ.

7. 正方行列 A は

$$A\,{}^tA = {}^tAA = E$$

がなりたつとき, すなわち $A^{-1} = {}^tA$ であるとき, 直交行列という.
直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

問題 8 の解答

1. (1) 求める行列式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(2) 求める行列式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Sarrus の方法より,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} &= a \cdot a \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot a \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot 1 \\ &= a^3 - 3a + 2. \end{aligned}$$

(4) 上三角行列の行列式は対角成分の積だから,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 24. \end{aligned}$$

2. n を自然数とし, A を $(2n-1)$ 次の交代行列とすると,

$$\begin{aligned} |A| &= |{}^tA| \\ &= |-A| \\ &= (-1)^{2n-1}|A| \\ &= -|A|. \end{aligned}$$

よって,

$$|A| = 0.$$

すなわち, 奇数次の交代行列の行列式は 0.

3. 行列式の性質より,

$$\begin{aligned} |P^{-1}AP| &= |P^{-1}(AP)| \\ &= |(AP)P^{-1}| \\ &= |APP^{-1}| \\ &= |A|. \end{aligned}$$

4. A を正則行列とすると,

$$AA^{-1} = E$$

だから, 両辺の行列式を取ると,

$$|AA^{-1}| = |E|.$$

よって,

$$|A||A^{-1}| = 1.$$

したがって,

$$|A| \neq 0,\ \ |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

5. A を $A^n = O$ となる巾零行列とすると,

$$|A^n| = |O|.$$

よって,

$$|A|^n = 0.$$

したがって,

$$|A| = 0.$$

すなわち, 巾零行列の行列式は 0.

6. 等式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

の両辺の行列式を取ると,

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{vmatrix}.$$

よって,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{vmatrix}.$$

したがって,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

7. A を直交行列とすると,

$$A^tA = E.$$

両辺の行列式を取ると,

$$|A^tA| = |E|.$$

よって,

$$|A||^tA| = 1$$

だから,

$$|A|^2 = 1.$$

したがって,

$$|A| = \pm 1.$$

すなわち, 直交行列の行列式は 1 または -1.