§9. 余因子展開

実際に行列式の計算を行う際は §8 において述べた行列式の性質を用いる他, ここで述べる余因子展開を用いることが多い.
n を 2 以上の自然数とし, n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の (i,j) 余因子といい, $\tilde{a}_{ij}$ と表す.
以下では特に断らなくとも, 余因子を考える正方行列は 2 次以上である.

例 3 次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を考える.
$(1,1)$ 余因子は

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

$(1,2)$ 余因子は

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= -a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}.\end{aligned}$$

$(2,2)$ 余因子は

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}.\end{aligned}$$

行列式は次の余因子展開を用いて, サイズの小さい正方行列の行列式の計算に帰着させることができる.

定理 $A=(a_{ij})$ を n 次の正方行列とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $i=1,2,3,\ldots,n$ とすると,

$$|A|=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+a_{i3}\tilde{a}_{i3}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{in} \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開}).$$

(2) $j=1,2,3,\ldots,n$ とすると,

$$|A|=a_{1j}\tilde{a}_{1j}+a_{2j}\tilde{a}_{2j}+a_{3j}\tilde{a}_{3j}+\cdots+a_{nj}\tilde{a}_{nj} \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}).$$

証明 (1) のみ示す.
まず,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列を A_{ij} とおくと,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
&= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \left| \begin{array}{c|c} a_{ij} & 0 \\ \hline a_{1j} & \\ \vdots & A_{ij} \\ a_{nj} & \end{array} \right| \\
&= (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \\
&= a_{ij} \tilde{a}_{ij}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}.$$

□

例　第 1 行に関する余因子展開を行うと,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} \\
&= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
\end{aligned}
$$

例　第 2 列に関する余因子展開を行うと,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{32}\tilde{a}_{32} \\
&= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.
\end{aligned}
$$

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して (i, j) 成分が A の (j, i) 余因子の n 次の正方行列を A の余因子行列といい, $\tilde{A}$ と表す. 添字の順序に注意すること.
余因子行列に関して次がなりたつ.

定理　A を n 次の正方行列とすると,

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E.$$

特に, $|A| \neq 0$ ならば, A は正則で,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

注意　問題 8 において扱ったように, 正則行列の行列式は 0 ではないから, 上の定理と合わせて, 正方行列は正則であることと行列式が 0 でないこととが同値となる.
また, 上の定理を用いて, n 次の正方行列 A に対して $AB = E$ または $BA = E$ となる n 次の正方行列 B が存在するならば, B は A の逆行列であることを示すことができる.

例　2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を考えると,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また,

$$|A| = ad - bc$$

だから, $ad - bc \neq 0$ のとき, A は正則で,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

最後に, Cramer の公式について述べておこう.

Cramer の公式　A を n 次の正則行列, a_i を A の第 i 列, b を n 次の列ベクトルとすると, 連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解は

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_i = \frac{|a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n|}{|A|}.$$

証明　$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解とすると,

$$\begin{aligned} |a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n| &= |a_1, \dots, a_{i-1}, Ax, a_{i+1}, \dots, a_n| \\ &= |a_1, \dots, a_{i-1}, x_1a_1 + \cdots + x_na_n, a_{i+1}, \dots a_n| \\ &= x_1|a_1, \dots, a_{i-1}, a_1, a_{i+1}, \dots a_n| + x_2|a_1, \dots, a_{i-1}, a_2, a_{i+1}, \dots a_n| \\ &\quad + \cdots + x_n|a_1, \dots, a_{i-1}, a_n, a_{i+1}, \dots a_n| \\ &= x_i|A|. \end{aligned}$$

よって, 解は上のように求められる. □

Cramer の公式は美しいが, 多くの行列式を求める必要があるため, 実際に計算する際は掃き出し法を用いる方がよいであろう.

問題 9

1. 行列式

$$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 99 & 99 \\ 100 & 99 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 99 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 99 \end{vmatrix}$$

を求めよ.

2. A を n 次の正方行列, $\tilde{A}$ を A の余因子行列とすると,

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$$

がなりたつことを示せ.

3. 4 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

により定める.
(1) 第 1 行に関する余因子展開を用いることにより, A の行列式を求めよ.
(2) A の行列式が 0 でないとき, 連立 1 次方程式

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とする. Cramer の公式を用いて, x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ.

問題 9 の解答

1. 求める行列式は

$$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 99 & 99 \\ 100 & 99 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 99 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 99 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 99 & 99 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{第} 2, 3, 4 \text{行} - \text{第} 1 \text{行})$$

$$= 100(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{第} 1 \text{列に関する余因子展開})$$

$$= 100(0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0) \quad (\text{Sarrus の方法})$$

$$= 200.$$

2. まず,

$$A\tilde{A} = |A|E \tag{$*$}$$

がなりたつ.
$|A| = 0$ のとき,

$$A\tilde{A} = O. \tag{$**$}$$

ここで, $\tilde{A}$ が正則であると仮定する.
$(**)$ の両辺に右から $\tilde{A}^{-1}$ を掛けると,

$$A = O$$

だから,

$$\tilde{A} = O.$$

これは矛盾.
よって, $\tilde{A}$ は正則でないから,

$$|\tilde{A}| = 0.$$

したがって,

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1} = 0.$$

$|A| \neq 0$ のとき, $(*)$ の両辺の行列式を取ると,

$$|A\tilde{A}| = ||A|E|.$$

よって,

$$|A||\tilde{A}| = |A|^n.$$

したがって,

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}.$$

3. (1) 第 1 行に関する余因子展開を行うと,

$$|A| = a \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} b & -d & c \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & d & -b \\ d & -c & a \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} b & a & -d \\ c & d & a \\ d & -c & b \end{vmatrix}$$

$$= a(a^3 - bcd + bcd + ac^2 + ad^2 + ab^2) + b(a^2 b + bd^2 + bc^2 - acd + acd + b^3)$$

$$- c(abd - abd - c^3 - cd^2 - a^2 c - b^2 c) + d(b^2 d + a^2 d + c^2 d + d^3 - abc + abc)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

(2) Cramer の公式および (1) の計算より,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -b & -c & -d \\ 0 & a & -d & c \\ 0 & d & a & -b \\ 0 & -c & b & a \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & 1 & -c & -d \\ b & 0 & -d & c \\ c & 0 & a & -b \\ d & 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & -d & c \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{vmatrix} \\
&= -\frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & -b & 1 & -d \\ b & a & 0 & c \\ c & d & 0 & -b \\ d & -c & 0 & a \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & d & -b \\ d & -c & a \end{vmatrix} \\
&= -\frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & -b & -c & 1 \\ b & a & -d & 0 \\ c & d & a & 0 \\ d & -c & b & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}\begin{vmatrix} b & a & -d \\ c & d & a \\ d & -c & b \end{vmatrix} \\
&= -\frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2}.
\end{aligned}
$$