§10. 特別な行列式

特別な形をした行列の行列式はむやみやたらに計算するのではなく, 上手く工夫することによって求められる場合がある.

Vandermonde の行列式　$n = 2, 3, 4, \ldots$ とすると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

ただし, $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n}$ は問題７においても扱ったように, $1 \leq i < j \leq n$ をみたすすべての組 (i, j) にわたって積を考えることを意味する.

証明　n に関する数学的帰納法により示す.
$n = 2$ のとき, 上の式は正しい.
$n = k$ のとき, 上の式が正しいと仮定する.
$n = k + 1$ のとき, 第 $(k+1)$ 行 $-$ 第 k 行 $\times x_1$, 第 k 行 $-$ 第 $(k-1)$ 行 $\times x_1$, 第 $(k-1)$ 行 $-$ 第 $(k-2)$ 行 $\times x_1$, $\ldots$, 第 2 行 $-$ 第 1 行 $\times x_1$ より,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k} & x_2^{k} & x_3^{k} & \cdots & x_{k+1}^{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_{k+1} - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_{k+1}(x_{k+1} - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{k-1}(x_2 - x_1) & x_3^{k-1}(x_3 - x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_{k+1} - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_{k+1}(x_{k+1} - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-1}(x_2 - x_1) & x_3^{k-1}(x_3 - x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

(第１列に関する余因子展開)

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{k+1} - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{k+1} - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq k+1} (x_j - x_i)$$

(帰納法の仮定)

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (x_j - x_i).$$

よって, $n = k + 1$ のときも上の式は正しい. □

$\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ の差積といい, $\Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ と表す.

差積は置換の符号の定義が well-defined であることを示す際にも用いられる.
Vandermonde の行列式を用いて, 次のような行列式を計算してみよう.

例 $n = 2, 3, 4, \ldots$ とし, n 次の正方行列 A を

$$y_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + \cdots + x_n^i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2n-2),$$

$$A = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1} & y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{2n-2} \end{pmatrix}$$

により定め, $|A|$ を求める.
まず,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} X^tX &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

$|X|$ は Vandermonde の行列式だから,

$$\begin{aligned} |A| &= |X^tX| \\ &= |X||^tX| \\ &= |X|^2 \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2. \end{aligned}$$

定理 $n = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

証明 n に関する数学的帰納法により示す.
$n = 0$ のとき, 上の式は正しい.

$n=k$ のとき, 上の式が正しいと仮定する.
$n=k+1$ のとき, 第 1 行に関する余因子展開を行うと,

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1} & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0x^{k+1} + (a_1x^k + a_2x^{k-1} + \cdots + a_{k+1}) \quad (\text{帰納法の仮定})$$
$$= a_0x^{k+1} + a_1x^k + a_2x^{k-1} + \cdots + a_{k+1}.$$

よって, $n=k+1$ のときも上の式は正しい. □

定理
$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+b_1+b_2+\cdots+b_n)(a-b_1)(a-b_2)\cdots(a-b_n).$$

証明 第 1 列 + 第 $2,3,4,\ldots,(n+1)$ 列より,

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b_1+b_2+\cdots+b_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a+b_1+b_2+\cdots+b_n & a & b_2 & \cdots & b_n \\ a+b_1+b_2+\cdots+b_n & b_2 & a & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+b_1+b_2+\cdots+b_n & b_2 & b_3 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b_1+b_2+\cdots+b_n) \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & a & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & b_2 & a & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_2 & b_3 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b_1+b_2+\cdots+b_n) \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a-b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2-b_1 & a-b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2-b_1 & b_3-b_2 & \cdots & a-b_n \end{vmatrix}$$

(第 $2,3,4,\ldots,(n+1)$ 行 − 第 1 行)

$$= (a+b_1+b_2+\cdots+b_n) \begin{vmatrix} a-b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2-b_1 & a-b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2-b_1 & b_3-b_2 & \cdots & a-b_n \end{vmatrix}$$

(第 1 列に関する余因子展開)

$$= (a+b_1+b_2+\cdots+b_n)(a-b_1)(a-b_2)\cdots(a-b_n).$$

□

問題 10

1. 次の (1)〜(4) の行列式を求めよ.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

2. $A = (a_{ij})$ を交代行列とする. 問題 8 においても扱ったように, A が奇数次のとき, $|A| = 0$ である. A が偶数次のとき, $|A|$ は a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$ の多項式 P を用いて,

$$|A| = P^2$$

と表されることが分かる. 例えば, 2 次の交代行列

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式は a^2 である. なお, P を Pfaffian という.
4 次の交代行列

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式を上のような形で表せ.

問題 10 の解答

1. (1) 求める行列式は Vandermonde の行列式だから,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

$$= (n-1)!(n-2)!(n-3)! \cdots 2!.$$

(2) 第 1 列 − 第 $(n+1)$ 列 $\times a_1$, 第 2 列 − 第 $(n+1)$ 列 $\times a_2$, 第 3 列 − 第 $(n+1)$ 列 $\times a_3$, ..., 第 n 列 − 第 $(n+1)$ 列 $\times a_n$ より,

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & 1 \\ 0 & x - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & 1 \\ 0 & 0 & x - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_n).$$

(3) 求める行列式を D_n とおく.
任意の自然数 n に対して

$$D_n = 1 \qquad (*)$$

であることを n に関する数学的帰納法により示す.
$n = 1$ のとき, $(*)$ は正しい.
$n = k$ のとき, $(*)$ が正しいと仮定する.
$n = k + 1$ のとき,

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & k+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & k \end{vmatrix} \quad (\text{第 } 2, 3, 4, \ldots, k+1 \text{ 列} - \text{第 } 1 \text{ 列})$$

$$= D_k \quad (\text{第 1 行に関する余因子展開})$$

$$= 1 \quad (\text{帰納法の仮定}).$$

よって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ は正しい.

(4) 第 $2, 3, 4, \ldots, n$ 行 $-$ 第 1 行より,

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & n-1
\end{vmatrix}
= (n-1)!.
$$

2. 第 1 行に関する余因子展開を行うと,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & a & b & c \\
-a & 0 & d & e \\
-b & -d & 0 & f \\
-c & -e & -f & 0
\end{vmatrix}
&= -a \begin{vmatrix}
-a & d & e \\
-b & 0 & f \\
-c & -f & 0
\end{vmatrix}
+ b \begin{vmatrix}
-a & 0 & e \\
-b & -d & f \\
-c & -e & 0
\end{vmatrix}
- c \begin{vmatrix}
-a & 0 & d \\
-b & -d & 0 \\
-c & -e & -f
\end{vmatrix} \\
&= -a(-cdf + bef - af^2) + b(be^2 - cde - aef) \\
&\quad - c(-adf + bde - cd^2) \\
&= 2acdf - 2abef + a^2f^2 + b^2e^2 - 2bcde + cd^2 \\
&= (af - be + cd)^2.
\end{aligned}
$$