§11. 幾何学的意味

行列式は面積や体積といった幾何学的な言葉で説明することができる．ここでは 2 次および 3 次の行列式について考える．
まず, 2 次の行ベクトル $a = (a_1, a_2)$ を原点から平面上の点 (a_1, a_2) へ向かう平面ベクトルとみなすことにする．三平方の定理より, ベクトル a の長さ $\|a\|$ は

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

によりあたえられる．
平面ベクトル $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ に対して

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

とおき, $\langle a, b \rangle$ を a と b の内積という．
平面ベクトル $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ がともに零ベクトルではないとし, これらのなす角が θ で, $0 < \theta < \pi$ とする．このとき, a, b を二辺とする三角形に対して余弦定理を用いると,

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

だから,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta.$$

よって,

$$\langle a, b \rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ．特に, a と b が直交するのは $\langle a, b \rangle = 0$ のときである．
したがって, a, b を二辺とする平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned}
\|a\|\|b\| \sin\theta &= \|a\|\|b\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \|a\|\|b\| \sqrt{1 - \frac{\langle a, b \rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} \\
&= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|.
\end{aligned}$$

これが 2 次の行列式の幾何学的意味である．
なお, ここでは混乱をさけるため行列式は $\det$ を用いることにする．
次に, 3 次の行ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ を原点から空間上の点 (a_1, a_2, a_3) へ向かう空間ベクトルとみなすことにする．このとき, ベクトル a の長さ $\|a\|$ は

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

によりあたえられる．また, 空間ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ に対して内積 $\langle a, b \rangle$ は

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

により定められる. 平面ベクトルの場合と同様に, a, b のなす角を θ とすると,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\|\cos\theta$$

がなりたつ.
空間ベクトル a, b に対して空間ベクトル $a \times b$ を a, b が平行な場合は零ベクトルと定め, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定める.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.
(2) $\|a \times b\|$ は a, b を二辺とする平行四辺形の面積.
(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向き.
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

$a \times b$ を a と b のベクトル積または外積という.
空間ベクトル e_1, e_2, e_3 を

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

により定める. よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと,

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$*$}$$

がなりたつ.
外積に関して次がなりたつ.

定理 a, b, c を空間ベクトルとすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) k を数とすると, $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

空間ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表されるから, 上の定理と $(*)$ より,

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

空間ベクトル a, b, c に対して外積 $a \times b$ と c の内積 $\langle a \times b, c\rangle$ を a, b, c の 3 重積という. a, b, c を

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,\ c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

と表しておくと, 上の計算より

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c\rangle &= c_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{(第 3 行に関する余因子展開)} \\ &= \det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

平面ベクトルの場合と同様の計算を行うと, a, b, c を三辺とする平行六面体の体積は $|\langle a \times b, c\rangle|$ であることが分かる. これが 3 次の行列式の幾何学的意味である.
空間ベクトルを用いると, 空間内の直線や平面を表すことができる.
まず, $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ を空間内の相異なる 2 点とする. $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ とおくと, a, b を通る直線上の点 $v = (x, y, z)$ は変数 t を用いて,

$$v = a + t(b - a)$$

と表される. この式は

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

と表すことができるから, $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_3 \neq b_3$ のときは

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

となる.
次に, 空間内の平面について考えよう.
直線の場合と同様に考えると, 空間内の平面は空間ベクトル a, b, c と変数 s, t を用いて,

$$v = a + sb + tc$$

と表される. ただし, a は平面上のある 1 点で, b, c は平行ではない平面上のベクトルである.
空間内の平面が点 a を通り, 空間ベクトル n と直交するとき, この平面上の点 v は

$$\langle v - a, n\rangle = 0$$

と表される.
よって,

$$v = (x, y, z),\ a = (a_1, a_2, a_3),\ n = (n_1, n_2, n_3)$$

とおくと,

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3$$

となる. n をこの平面の法線ベクトルまたは法ベクトルという.
上の計算より, 空間内の平面は x, y, z の 1 次方程式

$$ax + by + cz = d$$

として表すことができる. ただし, ここでは a, b, c, d は定数である. このとき, 空間ベクトル (a, b, c) は法ベクトルとなり, 特に零ベクトルではない. 特に, 原点を通る場合は $d = 0$ である.
法ベクトルは外積を用いると, 容易に計算することができる. 外積の定義における (1) の性質に注意しよう. 例えば, a, b, c を平面上の相異なる 3 点で, 同一直線上にはないとする. このとき, 3 点 a, b, c を通る平面が定まり, $b - a, c - a$ はこの平面上の平行でないベクトルとなる. よって, 法ベクトルは

$$(b - a) \times (c - a)$$

によりあたえられる.

問題 11

1. 平面ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

2. a, b, c を互いに相異なる数とする. 空間ベクトル $(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$ を三辺とする平行六面体の体積を求めよ.

3. 外積 $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$ を求めよ.

4. a, b, c, d を空間ベクトルとすると, 次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.
(1) $\langle a \times b, c\rangle = \langle b \times c, a\rangle = \langle c \times a, b\rangle$.
(2) $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$.
(3) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$. なお, この等式を Jacobi の恒等式という.
(4) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$. なお, この等式を Lagrange の公式という.

5. 空間上の 3 点 a, b, c を次の (1), (2) のように定めると, a, b, c は同一直線上にはない. a, b, c を通る平面の方程式を求めよ.
(1) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (3, 1, 2)$.
(2) $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 2, 2)$, $c = (3, 4, 5)$.

問題 11 の解答

1. 求める面積は

$$
\begin{aligned}
\left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\right| &= |-\cos^2\theta - \sin^2\theta| \\
&= |-1| \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

2. Vandermonde の行列式を計算すると, 求める体積は

$$
\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\right| = |(b-a)(c-a)(c-b)|.
$$

3. 求める外積は

$$
\begin{aligned}
(1,2,3)\times(4,5,6) &= (2\cdot 6 - 3\cdot 5, 3\cdot 4 - 1\cdot 6, 1\cdot 5 - 2\cdot 4) \\
&= (-3, 6, -3).
\end{aligned}
$$

4. (1) 行列式の性質より,

$$
\det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}.
$$

また,

$$
\langle a\times b, c\rangle = \det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$
\langle a\times b, c\rangle = \langle b\times c, a\rangle = \langle c\times a, b\rangle.
$$

(2) $a, b, c, (a\times b)\times c$ をそれぞれ

$$
(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (x, y, z)
$$

とおくと,

$$
(x, y, z) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\times(c_1, c_2, c_3)
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
x &= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} z &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3. \end{aligned}$$

よって,

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a.$$

(3) (2) より,

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b &= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a + \langle b, a\rangle c - \langle c, a\rangle b \\ &\quad + \langle c, b\rangle a - \langle a, b\rangle c \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) (1), (2) より,

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \times d\rangle &= \langle b \times (c \times d), a\rangle \\ &= -\langle (c \times d) \times b, a\rangle \\ &= -\langle \langle c, b\rangle d - \langle d, b\rangle c, a\rangle \\ &= -\langle c, b\rangle\langle d, a\rangle + \langle d, b\rangle\langle c, a\rangle \\ &= \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle. \end{aligned}$$

5. (1) 法ベクトルを求めると,

$$\begin{aligned} (b - a) \times (c - a) &= (1, 1, -2) \times (2, -1, -1) \\ &= (1 \cdot (-1) - (-2)(-1), (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \\ &= (-3, -3, -3). \end{aligned}$$

よって, 求める平面の方程式は

$$-3(x - 1) - 3(y - 2) - 3(z - 3) = 0.$$

すなわち,

$$x + y + z = 6.$$

(2) 法ベクトルを求めると,

$$\begin{aligned} (b - a) \times (c - a) &= (1, 1, 1) \times (2, 3, 4) \\ &= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\ &= (1, -2, 1). \end{aligned}$$

よって, 求める平面の方程式は

$$(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0.$$

すなわち,

$$x - 2y + z = 0.$$