§12. 行列の指数関数

行列の指数関数は定数係数の線形常微分方程式を解く際に威力を発揮する, 基本的かつ重要なものである. 以下では行列の級数が現れるが, 収束に関する厳密な議論は省略することとする.
まず, 自然対数の底または Napier の定数という数 e は歴史的には Jakob Bernoulli の考察した数列の極限

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

により定められる. 高等学校では指数関数 a^x の原点における接線の傾きが丁度 1 となる a として定義することであろう.
指数関数 e^x に対して Maclaurin 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

がなりたつことが分かる. 右辺は任意の x に対して収束する. 特に, $x = 1$ とおくことにより,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

が得られる.
上の Maclaurin 展開の x に正方行列 A を代入したものを考え,

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

とおく. 右辺は任意の A に対して成分毎に収束することが分かる. $\exp A$ を A の指数関数という.

例 A を (i, i) 成分が λ_i の n 次の対角行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表す.
$k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

だから,

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \text{\huge 0} \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

特に,

$$\exp O = E.$$

行列の指数関数の基本的性質について述べていこう.

定理 A, B を n 次の正方行列とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) A と B が可換ならば,

$$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B).$$

(2) $\exp A$ は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

証明 (1): $k = 0, 1, 2 \ldots$ とすると, A と B が可換ならば, 2 項展開

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l}$$

がなりたつ.
よって,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \left(\frac{1}{p!} A^p \right) \left(\frac{1}{q!} B^q \right) \\
&= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} B^q \right) \\
&= (\exp A)(\exp B).
\end{aligned}$$

(2): A と $-A$ は可換だから, (1) より,

$$\begin{aligned}
(\exp A)\exp(-A) &= \exp(A-A) \\
&= \exp O \\
&= E.
\end{aligned}$$

よって, $\exp A$ は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

□

定理 A を正方行列とすると,

$$\exp {}^t\!A = {}^t(\exp A).$$

証明 $k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$({}^t\!A)^k = {}^t(A^k)$$

がなりたつことを用いればよい. □

行列の指数関数を計算する際には次を用いるのが便利である.

定理 A を n 次の正方行列, P を n 次の正則行列とすると,

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P.$$

証明　$k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$
\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^k &= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\,個} \\
&= P^{-1}A^kP
\end{aligned}
$$

がなりたつことを用いればよい. □

行列の指数関数の行列式について述べるために, 行列の上三角化とトレースについて準備をしておく.
まず, 任意の正方行列は上三角化可能であることが分かる. すなわち, 次がなりたつ.

定理　A を n 次の正方行列とすると, $P^{-1}AP$ が上三角行列となるような n 次の正則行列 P が存在する.

次に, 正方行列 A の対角成分の和を $\operatorname{tr} A$ と書き, A の跡またはトレースという. トレースは行列式とともに正方行列, より一般的には線形変換というものの性質を調べる上でとても重要なものである.
行列の指数関数の行列式に関して次がなりたつ.

定理　A を正方行列とすると,

$$
|\exp A| = e^{\operatorname{tr} A}.
$$

証明　上の定理より, $P^{-1}AP$ が上三角行列となるような正則行列 P が存在する. すなわち,

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

と表される.
よって,

$$
\begin{aligned}
|\exp A| &= |P^{-1}(\exp A)P| \\
&= |\exp(P^{-1}AP)| \\
&= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & & & * \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & e^{\lambda_n} \end{vmatrix} \\
&= e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n} \\
&= e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\
&= e^{\operatorname{tr} A}.
\end{aligned}
$$

□

問題 12

1. $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ を求めよ.

2. A をすべての成分が 1 の n 次の正方行列とする. $\exp A$ を求めよ.

3. A が交代行列ならば, $\exp A$ は直交行列, すなわち

$$(\exp A)^{-1} = {}^t(\exp A)$$

であることを示せ.

4. 三角関数 $\sin x, \cos x$ に対して Maclaurin 展開

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

がなりたつことが分かる.

(1) $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 2 次の正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $(\exp A)(\exp B), (\exp B)(\exp A), \exp(A+B)$ を求めよ.

(3) m を 0 でない整数とする. a, b, c が $a^2 + bc = -m^2\pi^2$ をみたすとき, $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ を求めよ.

問題 12 の解答

1. まず,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N$$

と表しておく. ただし,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

λE と N は可換で, $N^2 = O$ だから,

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &= \exp(\lambda E) \exp N \\ &= e^\lambda (E + N) \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. A^k の成分はすべて n^{k-1} となるから,

$$\begin{aligned} \exp A &= E + A + \frac{n}{2!}A + \frac{n^2}{3!}A + \cdots \\ &= E + \frac{1}{n}\left(n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \cdots \right) A \\ &= E + \frac{e^n - 1}{n} A. \end{aligned}$$

3. A は交代行列だから,

$$\begin{aligned} {}^t(\exp A) &= \exp {}^t A \\ &= \exp(-A) \\ &= (\exp A)^{-1}. \end{aligned}$$

よって, $\exp A$ は直交行列.

4. (1) まず,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ$$

と表しておく. ただし,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

aE と bJ は可換で, $J^2 = -E$ だから,

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp(aE) \exp(bJ) \\ &= e^a \exp(bJ) \\ &= e^a \left(E + bJ - \frac{b^2}{2!}E - \frac{b^3}{3!}J + \cdots \right) \\ &= e^a \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots \right) E + e^a \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \cdots \right) J \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^a(\cos b)E + e^a(\sin b)J \\
&= \begin{pmatrix} e^a\cos b & e^a\sin b \\ -e^a\sin b & e^a\cos b \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) まず,

$$A^2 = B^2 = O$$

だから,

$$
\begin{aligned}
(\exp A)(\exp B) &= (E+A)(E+B) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\exp B)(\exp A) &= (E+B)(E+A) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

次に, (1) より,

$$
\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(3) まず,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

とおくと, 仮定より,

$$A^2 = -m^2\pi^2 E.$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\exp A &= E + A - \frac{m^2\pi^2}{2!}E - \frac{m^2\pi^2}{3!}A + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{m^2\pi^2}{2!} + \frac{m^4\pi^4}{4!} - \cdots\right)E + \frac{1}{m\pi}\left(m\pi - \frac{m^3\pi^3}{3!} + \frac{m^5\pi^5}{5!} - \cdots\right)A \\
&= (\cos m\pi)E + \frac{\sin m\pi}{m\pi}A \\
&= \begin{cases} E & (m \text{ は偶数}), \\ -E & (m \text{ は奇数}). \end{cases}
\end{aligned}
$$