§1. ベクトル空間

実数全体を $\mathbf{R}$ と表す. また, 実数を縦に n 個並べたもの全体を

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

と表す. 微分積分では実数を横に並べることが多いが, 線形代数では列ベクトルに左から行列を掛けることが多いため, $\mathbf{R}^n$ は上のように表すことにする.
$\mathbf{R}^n$ に対しては線形空間またはベクトル空間という構造を考えることができる.

定義　V を集合とし, $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする. V に和という演算

$$u + v \in V$$

およびスカラー倍という演算

$$au \in V$$

が定められ, 次の (1)〜(8) がなりたつとき, V を線形空間またはベクトル空間という.

(1) $u + v = v + u$ (交換律).
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合律).
(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の u に対して $u + 0 = 0 + u = u$ がなりたつ.
(4) $a(bu) = (ab)u$ (結合律).
(5) $(a + b)u = au + bu$ (分配律).
(6) $a(u + v) = au + av$ (分配律).
(7) $1u = u$.
(8) $0u = 0$.

ベクトル空間としての V の元をベクトルということがある. また, (3) におけるベクトル 0 を零ベクトルという.

上の定義では a, b を実数としているので, 厳密には V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間というのであるが, 以下では $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間などを考えることはほとんどない. ただし, $\mathbf{C}$ は複素数全体である.

注意　零ベクトルも数の零も同じ記号 0 を用いるが, 文脈から判断して区別すること. 例えば, (8) の式において左辺の $0u$ の 0 は実数 0 のことであるが, 右辺の 0 は零ベクトル 0 のことである. また, (2) より, $(u + v) + w$ および $u + (v + w)$ はともに

$$u + v + w$$

と表しても構わない. 通常の数の足し算と同様である.

例 (数ベクトル空間)
$\mathbf{R}^n$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. このとき, $\mathbf{R}^n$ を数ベクトル空間という.

次のような例も上の定義をみたすから, 立派なベクトル空間である.

例 実数係数の x の多項式全体を $\mathbf{R}[x]$ と表すことにする. $\mathbf{R}[x]$ は通常の多項式の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば,

$$1+x, 2x+3x^2 \in \mathbf{R}[x]$$

であるが, これらに対して和やスカラー倍は

$$(1+x)+(2x+3x^2)=1+3x+3x^2,\ 4(1+x)=4+4x$$

のように定められる.

ベクトル空間に関する基本的な事実をいくつか述べておく. 以下では, V をベクトル空間とする.

命題 零ベクトルは一意的.

証明 $0, 0'$ をともに V の零ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} 0' &= 0'+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, 零ベクトルは一意的である. ここで, 最初の等号では 0 を零ベクトルとみなし, 次の等号では $0'$ を零ベクトルとみなした. □

$u \in V$ に対して $u+u'=0$ をみたす $u' \in V$ を u の逆ベクトルという.

命題 逆ベクトルは一意的に存在する.

証明 $u \in V$ とする.
まず, 存在についてであるが,

$$\begin{aligned} u+(-1)u &= 1u+(-1)u \\ &= \{1+(-1)\}u \\ &= 0u \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, $(-1)u$ は u の逆ベクトルとなる.
次に, 一意性についてであるが, u', u'' をともに u の逆ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} u'' &= 0+u'' \\ &= (u+u')+u'' \\ &= (u'+u)+u'' \\ &= u'+(u+u'') \\ &= u'+0 \\ &= u' \end{aligned}$$

だから, 逆ベクトルは一意的である. □

注意 通常の数の演算の場合と同様に, u の逆ベクトルを $-u$ と表す. 更に, $u+(-v)$ を $u-v$ と表す.

また, ベクトル空間の定義において, (8) は逆ベクトルが存在することに置き替えてもよい. 実際, $u \in V$ とすると, (5) の分配律より,

$$\begin{aligned} 0u + 0u &= (0+0)u \\ &= 0u \end{aligned}$$

がなりたつが, ここで $0u$ の逆ベクトル $-0u$ を最初と最後の式に加えると, (8) が得られる.

1 つベクトル空間があると, その部分集合として部分空間というベクトル空間を考えることができる.

定義　W をベクトル空間 V の部分集合とする. W は V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となるとき, V の部分空間という.

定理　W がベクトル空間 V の部分空間となることと次の (1)〜(3) がなりたつこととは同値.

(1) $0 \in W$.
(2) $u, v \in W$ ならば, $u + v \in W$.
(3) $c \in \mathbf{R}$, $u \in W$ ならば, $cu \in W$.

上の定理の条件は 3 つしかなくて少なく感じるかもしれないが, W をベクトル空間の部分集合としているおかげで, ベクトル空間の定義における 8 つの性質がすべて導かれるのである.

注意　上の定理の (1) は

(1)' W は空でない.

に置き替えてもよい. 実際, (1) から (1)' が導かれることは明らかである. 逆に, (1)' を仮定すると, ある $w \in W$ が存在するから, ベクトル空間の定義の (8) と上の定理の (3) より,

$$0 = 0w \in W.$$

よって, (1) が示された.

例　0 以上の整数 n を固定しておき, 高々n 次の実数係数の x の多項式全体を $\mathbf{R}[x]_n$ と表すことにする. 例えば,

$$\mathbf{R}[x]_0 = \{a | a \in \mathbf{R}\}, \ \mathbf{R}[x]_1 = \{a + bx | a, b \in \mathbf{R}\}, \ \mathbf{R}[x]_2 = \{a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

である.
このとき, $\mathbf{R}[x]_n$ は上の例に現れた $\mathbf{R}[x]$ の部分空間となる.

例 (同次形の連立 1 次方程式の解空間)
A を $m \times n$ 行列とする. なお, 特に断らない限り, 行列の成分は実数であるとする. 数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 W を同次形の連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解全体として定める. すなわち,

$$W = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}$$

である. なお, $Ax = 0$ の 0 は $\mathbf{R}^m$ の零ベクトルである.
このとき, W は $\mathbf{R}^n$ の部分空間となることが分かる. W を同次形の連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間という. 線形代数では空間という言葉を使うことによって, 単なる集合ではなくベクトル空間の構造も兼ね備えていることを強調するのである.

問題 1

1. 実数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の零ベクトルとは零行列 O のことである. $A \in M_{k,l}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in M_{k,n}(\mathbf{R})$ を固定しておき, $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = C\}$$

により定める. W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのはどのようなときか調べよ.

2. n を 2 以上の自然数とし, 実数を成分とする n 次の正方行列全体からなるベクトル空間を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | |X| = 0\}$$

により定める. W が $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間となるかどうかを調べよ.

3. W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とする.

(1) V の部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V | u \in W_1 \text{ かつ } u \in W_2\}$$

は V の部分空間となることを示せ.

(2) V の部分集合 $W_1 + W_2$ を

$$W_1 + W_2 = \{u + v | u \in W_1,\ v \in W_2\}$$

により定める. $W_1 + W_2$ は V の部分空間となることを示せ. なお, $W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の和空間という.

(3) V の部分集合

$$W_1 \cup W_2 = \{u | u \in W_1 \text{ または } u \in W_2\}$$

が V の部分空間となるならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ がなりたつことを示せ.

問題 1 の解答

1. まず, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間であると仮定する.
このとき, W は零行列を含むから, C は零行列である.
逆に, C が零行列であると仮定する.
このとき,

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = O\}$$

と表される.
まず, 明らかに W は零行列を含む.
次に, $X, Y \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(X+Y)B &= AXB + AYB \\ &= O + O \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$X + Y \in W.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $X \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(cX)B &= c(AXB) \\ &= cO \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$cX \in W.$$

よって, W は $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間.
以上より, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのは C が零行列のときに限る.

2. 対角成分以外と (n,n) 成分が 0 で, その他の対角成分が 1 の $M_n(\mathbf{R})$ の元を X_1, (n,n) 成分が 1 で, その他の成分が 0 の $M_n(\mathbf{R})$ の元を X_2 とする.
このとき,

$$|X_1| = |X_2| = 0$$

だから,

$$X_1, X_2 \in W.$$

しかし, $X_1 + X_2$ は単位行列だから,

$$|X_1 + X_2| = 1.$$

よって,

$$X_1 + X_2 \notin W.$$

したがって, W は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間ではない.

3. (1) まず,

$$0 \in W_1,\ 0 \in W_2$$

だから,

$$0 \in W_1 \cap W_2.$$

次に, $u, v \in W_1 \cap W_2$ とすると,

$$u+v \in W_1,\ u+v \in W_2$$

だから,

$$u+v \in W_1 \cap W_2.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in W_1 \cap W_2$ とすると,

$$cu \in W_1,\ cu \in W_2$$

だから,

$$cu \in W_1 \cap W_2.$$

よって, $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間.

(2) まず,

$$0 \in W_1,\ 0 \in W_2.$$

だから,

$$0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2.$$

次に, $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in W_1 + W_2$, $u_1, u_2 \in W_1$, $v_1, v_2 \in W_2$ とすると,

$$u_1 + u_2 \in W_1,\ v_1 + v_2 \in W_2$$

だから,

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u + v \in W_1 + W_2$, $u \in W_1$, $v \in W_2$ とすると,

$$cu \in W_1,\ cv \in W_2$$

だから,

$$c(u+v) = cu + cv \in W_1 + W_2.$$

よって, $W_1 + W_2$ は V の部分空間.

(3) 対偶を示す. すなわち, $W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ ならば, $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならないことを示す.
$W_1 \not\subset W_2$ より, $u \notin W_2$ となる $u \in W_1$ が存在する.
また, $W_2 \not\subset W_1$ より, $v \notin W_1$ となる $v \in W_2$ が存在する.
ここで, $u + v \in W_1 \cup W_2$ となると仮定する.
このとき, $u + v \in W_1$ または $u + v \in W_2$.
$u + v \in W_1$ のとき, W_1 は V の部分空間で $u \in W_1$ だから,

$$v = (u+v) - u \in W_1.$$

これは矛盾.
同様に, $u + v \in W_2$ のときも矛盾が導かれる.
よって, $u + v \notin W_1 \cup W_2$ だから, $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならない.