§2. 1 次独立と 1 次従属

ここではベクトル空間に関して基本的な 1 次独立および 1 次従属という概念を中心に説明していく. なお, 「1 次」という言葉は「線形」という言葉に置き替えられることもある. 例えば, 1 次独立を線形独立ということもある.

定義　V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m \in V$, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ とする.
式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_mu_m$$

を $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次結合という.
等式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_mu_m = 0$$

がなりたつとき, これを $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次関係という.
$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ は自明な 1 次関係しかもたないとき, すなわち上の 1 次関係がなりたつのは

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0$$

の場合に限るとき, 1 次独立であるという.
$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ は 1 次独立でないとき, 1 次従属であるという.

例 (基本ベクトル)
数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める. すなわち, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して e_i は第 i 成分が 1 で, その他の成分が 0 のベクトルである. これらを基本ベクトルという.
このとき, $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ は 1 次独立である. 実際, 1 次関係

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + \cdots + c_ne_n = 0$$

がなりたつとすると, 左辺を計算して成分を比較することにより,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$$

が得られ, $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ は自明な 1 次関係しかもたない.

例　高々n 次の実数係数の x の多項式全体からなるベクトル空間 $\mathbf{R}[x]_n$ に対して, $(n+1)$ 個のベクトル

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

は 1 次独立である.

命題　ベクトル空間のベクトル u が 1 次従属であるための必要十分条件は $u = 0$.

証明　まず, u が 1 次従属であると仮定する.

このとき, 0 でない $c \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$cu = 0.$$

よって,

$$\begin{aligned} 0 &= c^{-1}0 \\ &= c^{-1}(cu) \\ &= (c^{-1}c)u \\ &= 1u \\ &= u. \end{aligned}$$

逆に, $u = 0$ とすると,

$$1u = 0.$$

よって, u は 1 次従属. □

上の命題の対偶を考えると, ベクトル空間のベクトル u が 1 次独立であるための必要十分条件は $u \neq 0$ ということになる.
さて, V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m \in V$ とする. このとき, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次結合を用いて, 次のように V の部分集合を定めることができる.
W を $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次結合全体とする. すなわち,

$$W = \{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_mu_m | c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R}\}$$

である. このとき, W は V の部分空間となることが分かる. W を $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ で生成される V の部分空間という. これを

$$W = \langle u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m \rangle_{\mathbf{R}}$$

と表すことにする.

例 $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとすると,

$$\mathbf{R}^n = \langle e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \rangle_{\mathbf{R}}.$$

$\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトルが 1 次独立であるか 1 次従属であるかの判定は行列式の計算に帰着させることができる.

定理 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^n$ とする. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は

$$|a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n| \neq 0.$$

証明 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ が 1 次独立であるとは, これらが自明な 1 次関係しかもたないことであるから, 言い替えると, $x \in \mathbf{R}^n$ についての連立 1 次方程式

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)x = 0$$

が自明な解しかもたないことである. これは

$$|a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n| \neq 0$$

と同値である. □

例 $\mathbf{R}^2$ のベクトル a_1, a_2 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2| &= 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ &= -2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2 は1次独立.

例 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a_1, a_2, a_3 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定めると, Sarrus の方法より,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, a_3| &= 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 12 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3 は1次独立.

例 $\mathbf{R}^4$ のベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, a_3, a_4| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3, a_4 は1次従属.

問題 2

1. 次のベクトルが1次独立であるか1次従属であるかを調べよ.

(1) $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathbf{R}^2$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 101 \\ 102 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 103 \\ 104 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 105 \\ 106 \end{pmatrix}.$$

2. A を n 次の正方行列とする. $A^m = O$ となる2以上の整数 m が存在し, 更にある $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $A^{m-1}x \neq 0$ となるとする.

(1) $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ は1次独立であることを示せ.

(2) $m \leq n$ であることを示せ.

(3) $m = n = 3$ のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる3次の正則行列 P が存在することを示せ.

問題2の解答

1. (1) 行列式を計算すると,

$$\begin{aligned}|a_1, a_2, a_3| &= 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 \\ &= 4 \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3 は1次独立.

(2) $x \in \mathbf{R}^3$ についての連立1次方程式

$$(a_1, a_2, a_3)x = 0$$

が自明な解しかもたないかどうかを調べればよい.
係数行列の基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 2 行} \times 3]{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 1 行} \times 2]{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 3 行}]{\text{第 1 行 と 第 2 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから,

$$\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3) = 3.$$

よって, 上の連立1次方程式は自明な解しかもたない.
したがって, a_1, a_2, a_3 は1次独立.

(3) a_1, a_2, a_3 は $\mathbf{R}^2$ のベクトルだから,

$$\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3) \leq 2.$$

よって, $x \in \mathbf{R}^3$ についての連立1次方程式

$$(a_1, a_2, a_3)x = 0$$

は自明でない解をもつ.
したがって, a_1, a_2, a_3 は1次従属.

2. (1) $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ の1次関係

$$c_1x + c_2Ax + c_3A^2x + \cdots + c_mA^{m-1}x = 0 \quad (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R}) \tag{$*$}$$

を考える.

まず, $(*)$ の両辺に左から A^{m-1} を掛けると, $A^m = O$ だから,

$$c_1 A^{m-1} x = 0.$$

$A^{m-1}x \neq 0$ だから, $A^{m-1}x$ は 1 次独立.
よって,

$$c_1 = 0.$$

次に,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_l = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, m-1)$$

がなりたつと仮定する.
$(*)$ の両辺に左から A^{m-l-1} を掛けると, 上と同様に,

$$c_{l+1} = 0.$$

したがって,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0.$$

すなわち, $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ は 1 次独立.

(2) (1) より, $y \in \mathbf{R}^m$ に対する連立 1 次方程式

$$(x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x)y = 0$$

は自明な解しかもたない.
また, 上の連立 1 次方程式の係数行列は $n \times m$ 行列.
よって,

$$\begin{aligned} m &= \mathrm{rank}(x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x) \\ &\leq n. \end{aligned}$$

(3) 3 次の正方行列 P を

$$P = (A^2x, Ax, x)$$

により定める.
(1) より, $|P| \neq 0$ だから, P は正則.
ここで,

$$\begin{aligned} AP &= (A^3x, A^2x, Ax) \\ &= (0, A^2x, Ax) \\ &= (A^2x, Ax, x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$