§4. 基底変換

有限次元ベクトル空間に対する基底は１通りではない. 基底の取り替えは正方行列を使って表すことができる.
V を n 次元のベクトル空間とする. V の基底を１組選んでおき, $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ とする.
V の任意のベクトル x は

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \cdots + x_nu_n \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbf{R})$$

と表される. なぜならば, 基底の定義より, V は $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ で生成されるからである.
しかも, 上の $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ は一意的である. 実際, x が

$$x = x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + \cdots + x'_nu_n \quad (x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n \in \mathbf{R})$$

とも表されるとすると,

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \cdots + x_nu_n = x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3 + \cdots + x'_nu_n$$

だから,

$$(x_1 - x'_1)u_1 + (x_2 - x'_2)u_2 + (x_3 - x'_3)u_3 + \cdots + (x_n - x'_n)u_n = 0.$$

ここで, 基底の定義より, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ は１次独立だから,

$$x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = x_3 - x'_3 = \cdots = x_n - x'_n = 0.$$

すなわち,

$$x_1 = x'_1,\ x_2 = x'_2,\ x_3 = x'_3,\ \ldots,\ x_n = x'_n$$

である.
上の $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ を基底 $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分といい,

$$x = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表す. ベクトルを成分とする行列に対しても, 行列の積を考えるのである. このように表しておくと, 今後の計算がすっきりしたものになることがある.

例　$\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき,

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \cdots + x_ne_n$$

だから, 標準基底 $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ に関する x の成分は $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ である.

ベクトルの成分は基底に依存する. 再び §3 で扱った例を思い出そう.

例 $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{a_1, a_2\}$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

により定め, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ とする.

基底 $\{a_1, a_2\}$ に関する $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の成分を c_1, c_2 とすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \\ x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

n 次元ベクトル空間 V の基底を 2 組選んでおき, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする.
各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する v_i の成分を $p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni}$ とすると,

$$\begin{aligned} v_1 &= p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \cdots + p_{n1}u_n, \\ v_2 &= p_{12}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{n2}u_n, \\ &\vdots \\ v_n &= p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{aligned}$$

となる. ここで, p_{ij} を (i, j) 成分とする n 次の正方行列を P とおくと, 上の式は

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)P$$

と表すことができる. P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の基底変換行列という.
最初に観察したことから, 1 つの基底変換に対して基底変換行列は一意的に定まる.
逆に, P を初めに選んでおき, 上の式で $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を定めることができる. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が基底となる条件を P の言葉で表すと次のようになる.

定理 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を n 次元ベクトル空間 V の基底, P を n 次正方行列とし, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ を

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)P$$

により定める. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の基底となるための必要十分条件は $|P| \neq 0$.
特に, 基底変換行列は正則行列である.

例 上の例における $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{a_1, a_2\}$ に加え, 標準基底 $\{e_1, e_2\}$ も考えよう.
P を基底変換 $\{e_1, e_2\} \to \{a_1, a_2\}$ の基底変換行列とすると,

$$(a_1, a_2) = (e_1, e_2)P.$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P.$$

よって,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

である.
一方, 基底変換 $\{a_1, a_2\} \to \{e_1, e_2\}$ の基底変換行列は P^{-1} である.

最後に, 基底変換によって成分がどのように変わるのかを基底変換行列を使って述べよう.

定理　$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を n 次元ベクトル空間 V の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の基底変換行列とする. 更に, $x \in V$ とし, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する x の成分とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

証明　まず, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分だから,

$$x = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

一方, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ は基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する x の成分で, P は基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の基底変換行列だから,

$$\begin{aligned} x &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1 つの基底に関する成分は一意的だから,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

□

問題 4

1. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

により定める. §2 において扱ったことから分かるように, $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}$ はともに $\mathbf{R}^3$ の基底となる.

(1) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする. 基底 $\{a_1, a_2, a_3\}$ に関する x の成分 x_1, x_2, x_3 を求めよ.

(2) 基底変換 $\{a_1, a_2, a_3\} \to \{b_1, b_2, b_3\}$ の基底変換行列 P を求めよ.

2. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を n 次元ベクトル空間 V の基底, P, Q をそれぞれ基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列とする. 基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列を求めよ.

3. $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \in \mathbf{R}[x]_3$ を

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = 2 + 5x,\ f_3(x) = 3 + 6x + 8x^2,\ f_4(x) = 4 + 7x + 9x^2 + 10x^3$$

により定め, これらを $\mathbf{R}[x]_3$ の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ の 1 次結合で表し, 4 次の正方行列 P を用いて

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = (1, x, x^2, x^3)P$$

と表す.

(1) P を求めよ.

(2) $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$ は $\mathbf{R}[x]_3$ の基底であることを示せ.

問題 4 の解答

1. (1) 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を解けばよい.
拡大係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)]{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

よって,

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{3}.$$

(2) P は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} P$$

により定まる.
行に関する基本変形を行うと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)]{\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array}\right).$$

よって,

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}
= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 10 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. P, Q はそれぞれ

$$
(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)P, \ (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)Q
$$

により定まるから,

$$
(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)PQ.
$$

よって, 求める基底変換行列は PQ.

3. (1) 求める P は

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.
$$

(2) P は上三角行列だから,

$$
\begin{aligned}
|P| &= 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

よって, $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$ は $\mathbf{R}[x]_3$ の基底である.