§5. 線形写像

1つの集合からもう1つの集合への対応を写像という. 線形代数ではこの集合としてはベクトル空間, 写像としては線形写像というものを考える.

定義　U, V をベクトル空間, f を U から V への写像とする. f は次の (1), (2) をみたすとき, 線形写像という.

(1) 任意の $u, v \in U$ に対して $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $u \in U$ に対して $f(cu) = cf(u)$.

上の (2) より, 線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことに注意しよう. 実際,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0 \cdot 0) \\ &= 0f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である.
また, すべてのベクトルを零ベクトルへ写す写像は上の (1), (2) をみたすから, 線形写像となる. これを零写像という.
次の例が最も親しみのある線形写像かもしれない.

例　$m \times n$ 行列 A を固定しておき, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f_A を行列の積を用いて,

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
このとき, f_A は線形写像となる. 実際, $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(x+y) &= A(x+y) \\ &= Ax + Ay \\ &= f_A(x) + f_A(y) \end{aligned}$$

となるから, (1) の性質がなりたつ.
また, $c \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(cx) &= A(cx) \\ &= cAx \\ &= cf_A(x) \end{aligned}$$

となるから, (2) の性質もなりたつ.

実は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像はすべて上の例のようにして得られるのである. すなわち, 次がなりたつ.

命題　f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像とする. このとき, ある $m \times n$ 行列 A が存在し,

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表される.

証明 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とする.
このとき, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $f(e_j)$ を $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ の 1 次結合で

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m \quad (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.
よって, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ として, 線形写像の性質を用いると,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m) + \cdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって, (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列を A とおくと,

$$f(x) = Ax.$$

□

微分や積分といった操作も上の線形写像の定義に現れた性質をみたしている. ただし, 厳密に線形写像というにはベクトル空間をきちんと設定する必要がある上, よく使われる例ではそれらは関数空間という無限次元のベクトル空間である.
さて, ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像 f に対して, V の部分集合 $\mathrm{Im}\, f$ および U の部分集合 $\mathrm{Ker}\, f$ を

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(u) | u \in U\},\ \mathrm{Ker}\, f = \{u \in U | f(u) = 0\}$$

により定める. $\mathrm{Im}\, f$ を f の像, $\mathrm{Ker}\, f$ を f の核という. 特に, $\mathrm{Im}\, f = V$ は f が上への写像または全射というものであることを意味する. 実は $\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ はそれぞれ V および U の部分空間となる. §1 で扱ったことを思い出しながら証明してみよう.

定理 $\mathrm{Im} f$ は V の部分空間.

証明 まず,

$$0 = f(0) \in \mathrm{Im}\, f.$$

次に,

$$f(u_1), f(u_2) \in \mathrm{Im}\, f \quad (u_1, u_2 \in U)$$

とすると,

$$f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}\, f.$$

更に,

$$c \in \mathbf{R},\ \ f(u) \in \operatorname{Im} f\ \ (u \in U)$$

とすると,

$$cf(u) = f(cu) \in \operatorname{Im} f.$$

よって, $\mathrm{Im} f$ は V の部分空間. □

定理　$\operatorname{Ker} f$ は U の部分空間.

証明　まず,

$$f(0) = 0$$

だから,

$$0 \in \operatorname{Ker} f.$$

次に, $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker} f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,

$$u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker} f.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in \operatorname{Ker} f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(cu) &= cf(u) \\ &= c0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,

$$cu \in \operatorname{Ker} f.$$

よって, $\operatorname{Ker} f$ は U の部分空間. □

f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, U は有限次元であるとする. このとき, $\mathrm{Im} f$ および $\operatorname{Ker} f$ はともに有限次元のベクトル空間となる. $\dim \operatorname{Im} f$ を f の階数といい, $\operatorname{rank} f$ と表す. また, $\dim \operatorname{Ker} f$ を f の退化次数といい, $\operatorname{null} f$ と表す. 階数および退化次数について, 次がなりたつ.

次元定理　$\operatorname{rank} f + \operatorname{null} f = \dim U$.

例　f_A を最初の例に現れた線形写像とすると,

$$\operatorname{Ker} f_A = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}.$$

すなわち, $\operatorname{Ker} f_A$ は同次形の連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間だから,

$$\operatorname{null} f_A = n - \operatorname{rank} A.$$

また, f_A は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像だから, 次元定理より,

$$\operatorname{rank} f_A = \operatorname{rank} A.$$

問題 5

1. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. このとき, f と g の合成写像という U から W への写像 $g \circ f$ を考えることができる. すなわち,

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad (u \in U)$$

である. $g \circ f$ は線形写像であることを示せ.

2. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m \in U$ とする. $f(u_1), f(u_2), f(u_3), \ldots, f(u_m)$ が 1 次独立ならば, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ も 1 次独立であることを示せ.

3. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とする. $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ であることと f が 1 対 1 の写像または単射というものであること, すなわち

$$f(u) = f(v) \quad (u, v \in U)$$

ならば, $u = v$ となることとは同値であることを示せ.

4. f をベクトル空間 V から V 自身への線形写像とする. このとき, f を V の線形変換という. f と f 自身の合成写像 $f \circ f$ が零写像であることと $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ であることとは同値であることを示せ.

5. m 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ の n 個のベクトル $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ に対して $m \times n$ 行列 A を

$$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

により定める.
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の中に r 個の 1 次独立なベクトルが存在し, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ のどの $(r+1)$ 個のベクトルも 1 次従属であるとする. このとき, $\mathrm{rank}\, A = r$ となることが分かる.
また, $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_r}$ が $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の中の r 個の 1 次独立なベクトルであるとし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_r}\}$ は $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底となることが分かる.
A を次の (1), (2) により定めるとき, $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を 1 組求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

問題 5 の解答

1. まず, $u, v \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).\end{aligned}$$

次に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって, $g \circ f$ は線形写像.

2. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_m u_m = 0 \quad (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R})$$

を考えると,

$$f(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_m u_m) = f(0).$$

f は線形写像だから,

$$c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2) + c_3 f(u_3) + \cdots + c_m f(u_m) = 0.$$

$f(u_1), f(u_2), f(u_3), \ldots, f(u_m)$ は 1 次独立だから,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0.$$

よって, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ は 1 次独立.

3. まず, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であると仮定する.
$u, v \in V$ が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとすると, f は線形写像だから,

$$f(u - v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

すなわち,

$$u = v.$$

よって, f は単射.
逆に, f が単射であると仮定する.

$u \in \operatorname{Ker} f$ とすると,

$$f(u) = 0 \\ = f(0).$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

4. まず, $f \circ f$ が零写像であると仮定する.
$f(u) \in \operatorname{Im} f \ (u \in U)$ とすると, 仮定より,

$$f(f(u)) = (f \circ f)(u) \\ = 0.$$

よって,

$$f(u) \in \operatorname{Ker} f.$$

したがって,

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f.$$

逆に, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ であると仮定する.
$u \in U$ とすると, $f(u) \in \operatorname{Im} f$ だから, 仮定より,

$$0 = f(f(u)) \\ = (f \circ f)(u).$$

よって, $f \circ f$ は零写像.

5. (1) 2 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立で, 3 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属だから, $\operatorname{rank} A = 2$ で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底.

(2) 2 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立で, A の列ベクトルからどの 3 個を選んでもそれらは 1 次従属だから, $\operatorname{rank} A = 2$ で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底.