§6. 表現行列

以下ではベクトル空間は有限次元であるとする.
f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底とする. このとき, §4 においても扱ったように, $m \times n$ 行列 A を用いて,

$$(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)A$$

と表すことができる. $v_1, v_2, \ldots, v_m$ は１次独立だから, このような A は一意的に定まる. A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列という.
次の例から分かるように, §5 において扱った行列 A の定める自然な線形写像 f_A の表現行列は標準基底に関しては A そのものとなる.

例　A を (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とすると,

$$\begin{aligned}(f_A(e_1), f_A(e_2), \ldots, f_A(e_n)) &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \\ &= (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)A.\end{aligned}$$

よって, $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底に関する f_A の表現行列は A.

表現行列と成分の関係を見てみよう. 次の定理は上の例のような状況では常識として理解していることであろう.

定理　f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列とする. $x \in U$ に対して, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する $f(x)$ の成分とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

証明　まず, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ は基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する $f(x)$ の成分だから,

$$f(x) = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

一方, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分, f は線形写像で, A は基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列だから,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n) \\
&= x_1f(u_1) + x_2f(u_2) + \cdots + x_nf(u_n) \\
&= (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (v_1, v_2, \ldots, v_m)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1 つの基底に関する成分は一意的だから,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

□

表現行列は基底に依存するものである. 次は基底変換によって表現行列がどのように変わるのかを見てみよう.

定理　f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ を V の基底, Q を基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \to \{v'_1, v'_2, \ldots v'_m\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$

証明　P の (i, j) 成分を p_{ij} とおき, 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned}
&(f(u'_1), f(u'_2), \ldots, f(u'_n)) \\
&\quad = (f(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \cdots + p_{n1}u_n), \ldots, f(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n)) \\
&\quad = (p_{11}f(u_1) + p_{21}f(u_2) + \cdots + p_{n1}f(u_n), \ldots, p_{1n}f(u_1) + p_{2n}f(u_2) + \cdots + p_{nn}f(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))P \\
&\quad = (v_1, v_2, \ldots, v_m)AP.
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
(f(u'_1), f(u'_2), \ldots, f(u'_n)) &= (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)B \\
&= (v_1, v_2, \ldots, v_m)QB.
\end{aligned}$$

よって,

$$(v_1, v_2, \ldots, v_m)AP = (v_1, v_2, \ldots, v_m)QB.$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は 1 次独立だから,

$$AP = QB.$$

基底変換行列は正則だから,

$$B = Q^{-1}AP.$$

□

問題 5 においても触れたが, ベクトル空間 U から U 自身への線形写像を U の線形変換という. このとき, 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列を単に基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列ということにする. 上の定理を線形変換の場合に適用すると, 次が得られる.

定理　f をベクトル空間 U の線形変換, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = P^{-1}AP.$$

証明　上の定理において,

$$V = U,\ \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\} = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$$

とすると,

$$Q = P.$$

よって,

$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}AP \\ &= P^{-1}AP. \end{aligned}$$

□

例　最初の例に現れた $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f_A を再び考える. 標準基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ に関する f_A の表現行列は行列 A そのものであった.
ここで, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ もそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の基底であるとする.
P を基底変換 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の基底変換行列, Q を基底変換 $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ の基底変換行列とする.
このとき,

$$P = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ Q = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

となる.
よって, B を基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ に関する f_A の表現行列とすると,

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{-1}A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

がなりたつ.

問題 6

1. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}^3$, $b_1, b_2 \in \mathbf{R}^2$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

により定める. §2 において扱ったことから分かるように, $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2\}$ はそれぞれ $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2$ の基底となる.

(1) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f を

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} x \quad (x \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 基底 $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) $\mathbf{R}^2$ の線形変換 g を

$$g(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y \quad (y \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. 基底 $\{b_1, b_2\}$ に関する g の表現行列を求めよ.

2. f, g をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, U から V への写像 $f + g, cf$ をそれぞれ

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u),\ (cf)(u) = cf(u)\ (u \in U)$$

により定めると, $f + g, cf$ は線形写像となり, U から V への線形写像全体はベクトル空間となることが分かる.

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底, A, B をそれぞれ基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f, g の表現行列とする. 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する $f + g, cf$ の表現行列を求めよ.

3. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ をそれぞれ U, V, W の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ に関する g の表現行列とする.

(1) 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ に関する合成写像 $g \circ f$ の表現行列を求めよ.

(2) f が全単射, すなわち全射かつ単射であるとき, $f^{-1} \circ f$ および $f \circ f^{-1}$ がそれぞれ U, V の恒等写像となるような V から U への写像 f^{-1} が存在する. すなわち

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,\ (f \circ f^{-1})(y) = y$$

が任意の $x \in U$, $y \in V$ に対してなりたつ. f^{-1} を f の逆写像という. このとき, f^{-1} は線形写像であることを示せ. なお, 上のような f が存在するとき, f を同型写像といい, U と V は同型であるという.

(3) f が同型写像であるとする. このとき, $m = n$ となることが分かる. 基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列を求めよ.

問題 6 の解答

1. (1) 求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9 & -20 & 5 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. まず,

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m)A,$$
$$(g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m)B$$

だから,

$$\begin{aligned}
&((f+g)(u_1), (f+g)(u_2), \dots, (f+g)(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1)+g(u_1), f(u_2)+g(u_2), \dots, f(u_n)+g(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) + (g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) \\
&\quad = (v_1, v_2, \dots, v_m)A + (v_1, v_2, \dots, v_m)B \\
&\quad = (v_1, v_2, \dots, v_m)(A+B).
\end{aligned}$$

よって, 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する $f+g$ の表現行列は $A+B$.
また,

$$\begin{aligned}
((cf)(u_1), (cf)(u_2), \dots, (cf)(u_n)) &= (cf(u_1), cf(u_2), \dots, cf(u_n)) \\
&= c(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\
&= c(v_1, v_2, \dots, v_m)A \\
&= (v_1, v_2, \dots, v_m)(cA).
\end{aligned}$$

よって, 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する cf の表現行列は cA.

3. (1) A の (k,i) 成分を a_{ki}, B の (j,k) 成分を b_{jk} とすると, $i = 1, 2, \dots, n$ のとき,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(u_i) &= g(f(u_i)) \\
&= g(a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{mi}v_m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki} g(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki}(b_{1k}w_1 + b_{2k}w_2 + \dots + b_{lk}w_l) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \sum_{j=1}^{l} b_{jk} w_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki} w_j$$

ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{ki}$ は BA の (j, i) 成分.

よって, 求める表現行列は BA.

(2) まず, $x, y \in V$ とすると, 逆写像の定義より,

$$f(f^{-1}(x+y)) = x + y.$$

一方, f が線形写像であることと逆写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) &= f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) \\ &= x + y. \end{aligned}$$

f は単射だから,

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

次に, $c \in \mathbf{R}$, $x \in V$ とすると, 逆写像の定義より,

$$f(f^{-1}(cx)) = cx.$$

一方, f が線形写像であることと逆写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(cf^{-1}(x)) &= cf(f^{-1}(x)) \\ &= cx. \end{aligned}$$

f は単射だから,

$$f^{-1}(cx) = cf^{-1}(x).$$

よって, f^{-1} は線形写像.

(3) 求める表現行列を B とする.

恒等写像に対する表現行列は単位行列となるから, (1) と合わせると, BA, AB はともに n 次の単位行列.

よって, $B = A^{-1}$.