§7. 固有値と固有ベクトル

ここでは行列の対角化を計算する際に必要となる固有値や固有ベクトルなどについて述べる.
f をベクトル空間 V の線形変換とする.
零ベクトルでない $u \in V$ および $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$f(u) = \lambda u$$

をみたすとする. このとき, λ を f の固有値, u を固有値 λ に対する f の固有ベクトルという.
固有値 λ に対する f の固有ベクトル全体に零ベクトルを加えた V の部分集合を $W(\lambda)$ と表すことにする. このとき,

$$W(\lambda) = \{u \in V | f(u) = \lambda u\}$$

で, 更に $W(\lambda)$ は V の部分空間となることが分かる. $W(\lambda)$ を固有値 λ に対する f の固有空間という.
まず, 正方行列の定める自然な線形変換の固有値, 固有ベクトルについて考えよう.
A を n 次の正方行列とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ の線形変換 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めることができる. f_A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を単にそれぞれ A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間という.
λ を A の固有値, x を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとすると, 定義より,

$$Ax = \lambda x$$

がなりたつ. E を n 次の単位行列とすると, これは

$$(\lambda E - A)x = 0$$

と同値である. すなわち, x は上の同次形の連立１次方程式の自明でない解であるから,

$$|\lambda E - A| = 0$$

がなりたつ.
ここで, t の n 次多項式 $\phi_A(t)$ を

$$\phi_A(t) = |tE - A|$$

により定める. $\phi_A(t)$ を A の特性多項式または固有多項式, n 次方程式 $\phi_A(t) = 0$ を A の特性方程式または固有方程式という.
固有方程式の解は複素数の範囲で考えることができるが, ここでは $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考えている. このことに注意すると, 上で観察したことから, 次がなりたつ.

定理　A を正方行列とする. λ が A の固有値であるための必要十分条件は λ が A の固有方程式の実数解であること.

例　3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有空間を求めよう.

まず, A の固有多項式は

$$
\begin{aligned}
\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)^3 - 1 - 1 - (t-2) - (t-2) - (t-2) \\
&= (t-2)^3 - 3(t-2) - 2 \\
&= \{(t-2)+1\}\{(t-2)^2 - (t-2) - 2\} \\
&= (t-1)\{(t-2)+1\}\{(t-2)-2\} \\
&= (t-1)^2(t-4).
\end{aligned}
$$

よって, A の固有値は 1 と 4.
次に, 固有値 1 に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める.
連立 1 次方程式

$$
(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0
$$

を考える. すなわち,

$$
-x_1 - x_2 - x_3 = 0
$$

である.
よって,

$$
x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_1 - c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).
$$

したがって,

$$
W(1) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.
$$

更に, 固有値 4 に対する A の固有空間 $W(4)$ を求める.
連立 1 次方程式

$$
(4E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0
$$

を考える.
$4E-A$ の行に関する基本変形を行うと,

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 2 行} \times(-1)}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\text{第 3 行} + \text{第 2 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2}
\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 3 行} + \text{第 1 行}}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 2 行} \times \frac{1}{3}}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{第 1 行} + \text{第 2 行} \times 2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0$$

だから,

$$x_1 = c,\ x_2 = c,\ x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

したがって,

$$W(4) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}.$$

最後に, 行列多項式と Caley-Hamilton の定理について述べておこう.
$f(t)$ を t の多項式とし,

$$f(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R})$$

と表しておく.
A を正方行列とすると, 上の式の右辺の t に A を代入して, 正方行列 $f(A)$ を

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

により定めることができる. ただし, E は A と行および列の数が等しい単位行列である. $f(A)$ を $f(t)$ に対する A の行列多項式という.
正方行列 A に対しては固有多項式 $\phi_A(t)$ が定まるのであった. では, $\phi_A(t)$ に対する A の行列多項式はどうなるのであろうか. 実はこれはどのような A に対しても零行列になってしまうのである. すなわち, 次がなりたつ.

Caley-Hamilton の定理　$\phi_A(A) = O$.

例　2 次の正方行列に対する Caley-Hamilton の定理は場合によっては高等学校でも学ぶものであるが, ここで確認してみよう.
2 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} \\ &= (t-a)(t-d) - (-b)(-c) \\ &= t^2 - (a+d)t + ad - bc. \end{aligned}$$

よって, Caley-Hamilton の定理より,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O.$$

ここで, $a+d$ は問題 3 においても扱った A のトレースで, $ad-bc$ は A の行列式だから, 上の式は

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + |A|E = O$$

と表すことができる.

問題 7

1. f をベクトル空間 V の線形変換とする. m 個の f から得られる合成写像を f^m と表す. 例えば, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ である. また, $f^1 = f$ とする.
ある自然数 m に対して f^m が零写像となるならば, f の固有値は 0 のみであることを示せ.

2. 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

により定める.
(1) A の固有値を求めよ.
(2) A の最小の固有値に対する固有空間を求めよ.

3. Caley-Hamilton の定理を用いて, $ad - bc \neq 0$ のとき, 正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

4. A, B を n 次の正方行列とする.
(1) $\mathrm{tr}\,({}^t A) = \mathrm{tr}\,A$ がなりたつことを示せ.
(2) $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ がなりたつことを示せ.
(3) B が正則行列のとき, $\mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}\,A$ がなりたつことを示せ.

問題 7 の解答

1. u を固有値 λ に対する f の固有ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} 0 &= f^m(u) \\ &= f^{m-1}(f(u)) \\ &= f^{m-1}(\lambda u) \\ &= \lambda f^{m-1}(u) \\ &= \cdots \\ &= \lambda^m u. \end{aligned}$$

$u \neq 0$ だから,

$$\lambda^m = 0.$$

すなわち,

$$\lambda = 0.$$

2. (1) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-2 & -2 \\ 0 & -2 & t-3 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t-2)(t-3)+0+0-0-4(t-3)-4(t-1) \\ &= (t-1)(t-2)(t-3)-8(t-2) \\ &= (t-2)\{(t-1)(t-3)-8\} \\ &= (t-2)(t^2-4t-5) \\ &= (t+1)(t-2)(t-5). \end{aligned}$$

よって, A の固有値は $-1, 2, 5$.

(2) 固有値 -1 に対する A の固有空間 $W(-1)$ を求めればよい.

連立 1 次方程式

$$(-E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考える.

$-E-A$ の行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{\text{第 1 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}+\text{第 1 行}\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行}+\text{第 3 行}]{\text{第 1 行}-\text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$x_1 - 2x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0$$

だから,

$$x_1 = 2c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

したがって,

$$W(-1) = \left\{ c \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. あたえられた行列を A とおくと, Caley-Hamilton の定理より,

$$A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)E.$$

$ad - bc \neq 0$ だから,

$$A\left[-\frac{1}{ad-bc}\{A-(a+d)E\}\right] = E.$$

よって,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{ad-bc}\{A-(a+d)E\} \\ &= -\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (1) ${}^tA$ の (i,i) 成分は A の (i,i) 成分に一致するから, トレースの定義より,

$$\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,A.$$

(2) A, B の (i,j) 成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とおくと,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} \\ &= \mathrm{tr}\,(BA). \end{aligned}$$

(3) (2) より,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) &= \mathrm{tr}\,(B^{-1}(AB)) \\ &= \mathrm{tr}\,((AB)B^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}\,A. \end{aligned}$$