§10. 内積空間

ここではベクトル空間に対して内積という新たな構造を考える. 内積によってベクトルの長さやベクトル同士の直交性を考えることができるようになる.

定義 V をベクトル空間とし, $u, v, w \in V$, $c \in \mathbf{R}$ とする. 任意のベクトル u, v に対して実数 $\langle u, v \rangle$ が定まり, 次の (1)〜(4) をみたすとき, $\langle u, v \rangle$ を u と v の内積, 対応 $\langle\ ,\ \rangle$ を V の内積, 組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積空間という.

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
(2) $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$.
(3) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.
(4) $u \neq 0$ ならば, $\langle u, u \rangle > 0$.

以下では内積の記号は常に $\langle\ ,\ \rangle$ を用いることにして, 内積空間は単に V と表すことにする. また, ここでは $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考えているが, $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間に対する内積は Hermite 内積といい, 定義は上とは若干異なるものとなる.
零ベクトルとの内積は 0 となることに注意しよう. 実際, (2) より,

$$\begin{aligned} \langle 0, u \rangle &= \langle 0 \cdot 0, u \rangle \\ &= 0\langle 0, u \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

で, 更に (3) より,

$$\begin{aligned} \langle u, 0 \rangle &= \langle 0, u \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである.
また,

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle,\ \langle u, cv \rangle = c\langle u, v \rangle$$

がなりたつことも容易に確かめることができる.
次の例は $n = 2, 3$ の場合には既に親しみのあるものであろう.

例 (標準内積)
$\mathbf{R}^n$ のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

とおくと, 対応 $\langle\ ,\ \rangle$ は上の (1)〜(4) の性質をみたし, $\mathbf{R}^n$ の内積を定めることが分かる. これを $\mathbf{R}^n$ の標準内積という.
なお, この場合は行列を使って

$$\langle x, y \rangle = {}^t x y$$

と表すこともできる．もちろん 1 次の正方行列は普通の実数と同一視している．

例　$f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]_n$ に対して

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

とおくと, 対応 $\langle\ ,\ \rangle$ は上の (1)〜(4) の性質をみたし, $\mathbf{R}[x]_n$ の内積を定めることが分かる．

V を内積空間とすると, 任意の $u \in V$ に対して

$$\langle u, u\rangle \geq 0$$

となるから,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

とおくことができる．内積の定義における (4) と定義の直後に注意したことより, $\|u\| = 0$ となるのは $u = 0$ のときのみである．$\|u\|$ を u のノルムまたは長さ, 対応 $\|\ \|$ を V のノルムという．ノルムに関して次がなりたつ．

定理　V を内積空間とし, $u, v \in V$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, V のノルム $\|\ \|$ に関して次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $\|cu\| = |c|\|u\|$.
(2) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式).

証明　(1): ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}\|cu\| &= \sqrt{\langle cu, cu\rangle}\\ &= \sqrt{c\langle u, cu\rangle}\\ &= \sqrt{c^2\langle u, u\rangle}\\ &= |c|\sqrt{\langle u, u\rangle}\\ &= |c|\|u\|.\end{aligned}$$

(2): $v = 0$ のときは明らか.
$v \neq 0$ のとき,

$$\langle v, v\rangle > 0$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v \right\rangle \langle v, v\rangle\\ &= \left(\langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, u\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle^2}\langle v, v\rangle\right)\langle v, v\rangle\\ &= \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2.\end{aligned}$$

よって,

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

すなわち,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

(3): (2) より,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

よって,

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

□

なお, Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立は u, v が 1 次従属のときに限ることが証明から分かる.

中線定理　V を内積空間とし, $u, v \in V$ とすると, V のノルム $\|\ \|$ に関して次がなりたつ.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

証明　ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, -v\rangle + \|-v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).\end{aligned}$$

□

内積空間 V の 2 つのベクトル u, v に対して, $\langle u, v\rangle = 0$ がなりたつとき, u と v は直交するという.

定理　$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ を内積空間 V の零ベクトルでないベクトルとする. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ は互いに直交するならば, 1 次独立.

証明　$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ の 1 次関係

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_mu_m = 0 \quad (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R})$$

を考えると, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ のとき,

$$\begin{aligned}0 &= \langle u_i, 0\rangle \\ &= \langle u_i, c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_mu_m\rangle \\ &= c_1\langle u_i, u_1\rangle + c_2\langle u_i, u_2\rangle + c_3\langle u_i, u_3\rangle + \cdots + c_m\langle u_i, u_m\rangle.\end{aligned}$$

仮定より, $i \ne j$ のとき,

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0$$

だから,

$$c_i\langle u_i, u_i\rangle = 0.$$

$u_i \ne 0$ だから,

$$c_i = 0.$$

よって, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ は 1 次独立. □

問題 10

1. $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

に対して $x \times y \in \mathbf{R}^3$ を

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ x_3y_1 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

により定める. $\mathbf{R}^3$ の標準内積を考えると, 次の (1), (2) がなりたつことを示せ. なお, $x \times y$ を x と y の外積という.

(1) $x, y \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$.

(2) $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\langle x \times y, z\rangle = |x, y, z|$. なお, $\langle x \times y, z\rangle$ を x, y, z の 3 重積という.

2. $\mathbf{R}^n$ の標準内積を考える. A を n 次の正方行列とすると, 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle x, Ay\rangle = \langle {}^tAx, y\rangle$$

がなりたつことを示せ.

3. 内積空間 V の部分空間 W に対して V の部分集合 $W^\perp$ を

$$W^\perp = \{u \in V \mid \text{任意の } v \in W \text{ に対して } \langle u, v\rangle = 0\}$$

により定める.

(1) $W^\perp$ は V の部分空間であることを示せ. なお, $W^\perp$ を W の直交補空間という.

(2) $W \cap W^\perp = \{0\}$ がなりたつことを示せ.

4. $\mathbf{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める. $\mathbf{R}^3$ の標準内積を考えるとき, W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ.

問題 10 の解答

1. (1) x, y を問題文のように成分で表しておくと,

$$\begin{aligned}\|x\times y\|^2 &= \langle x\times y, x\times y\rangle \\ &= (x_2y_3-y_2x_3)^2+(x_3y_1-y_3x_1)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2 \\ &= x_2^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3+x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2-2x_3x_1y_3y_1+x_1^2y_3^2 \\ &\quad +x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\|x\|^2\|y\|^2-\langle x,y\rangle^2 &= \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle-\langle x,y\rangle^2 \\ &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \\ &= x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_3^2 \\ &\quad +x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_3^2-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2 \\ &\quad -2x_1x_2y_1y_2-2x_3x_1y_3y_1-2x_2x_3y_2y_3 \\ &= x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_3^2+x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2 \\ &\quad -2x_1x_2y_1y_2-2x_3x_1y_3y_1-2x_2x_3y_2y_3.\end{aligned}$$

よって,

$$\|x\times y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2-\langle x,y\rangle^2.$$

(2) z も x, y と同様に $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3\end{pmatrix}$ と表しておくと,

$$\begin{aligned}\langle x\times y, z\rangle &= (x_2y_3-y_2x_3)z_1+(x_3y_1-y_3x_1)z_2+(x_1y_2-y_1x_2)z_3 \\ &= z_1x_2x_3-z_1y_2x_3+y_1z_2x_3-x_1z_2y_3+x_1y_2z_3-y_1x_2z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \\ &= |x,y,z|.\end{aligned}$$

2. 標準内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, Ay\rangle &= {}^t x(Ay) \\ &= ({}^t xA)y \\ &= ({}^t x{}^{tt}A)y \\ &= {}^t({}^t Ax)y \\ &= \langle {}^t Ax, y\rangle.\end{aligned}$$

3. (1) $v\in W$ とする.
まず,

$$\langle 0, v\rangle = 0$$

だから,

$$0 \in W^{\perp}.$$

次に, $u_1, u_2 \in W^{\perp}$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle u_1 + u_2, v\rangle &= \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$u_1 + u_2 \in W^{\perp}.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in W^{\perp}$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle cu, v\rangle &= c\langle u, v\rangle \\ &= c0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$cu \in W^{\perp}.$$

よって, $W^{\perp}$ は V の部分空間.

(2) $u \in W \cap W^{\perp}$ とすると,

$$\langle u, u\rangle = 0.$$

よって,

$$u = 0.$$

4. $x \in W^{\perp}$, $y \in W$ とすると,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表されるから,

$$\begin{aligned}0 &= \langle x, y\rangle \\ &= c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3).\end{aligned}$$

c_1, c_2 は任意だから,

$$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0.$$

すなわち,

$$x_1 = c,\ x_2 = c,\ x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

したがって,

$$W^{\perp} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}.$$