§12. 対称行列の対角化

ここでは次の定理について述べる.

定理　対称行列は直交行列によって対角化される.

この定理は数学の様々な場面に現れるが, 例えば, 統計学における主成分分析は共分散行列が対称行列となり, 直交行列によって対角化可能であることを用いる.
この定理は次の 2 つの定理から導かれる.

定理　対称行列の固有方程式の解はすべて実数.

定理　n 次の正方行列 A の固有方程式の解がすべて実数ならば, ある n 次の直交行列 P が存在し, $P^{-1}AP$ は上三角行列となる.

対称行列を対角化する直交行列は次の (1)〜(3) の手順で求めればよい.

(1) 固有方程式を解き, 固有値を求める.
(2) 各固有値に対する固有空間の正規直交基底を選ぶ.
(3) 正規直交基底を列ベクトルとして並べる.

もちろん, 上の手順では $\mathbf{R}^n$ の標準内積を考えている. また, 対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することも用いている. 実際, x, y をそれぞれ対称行列 A の相異なる固有値 λ, μ に対する固有ベクトルとすると, 問題 10 において扱ったように,

$$\langle x, Ay \rangle = \langle {}^t\!Ax, y \rangle$$

がなりたつから, A が対称行列であることと合わせて,

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle \\ &= \langle {}^t\!Ax, y \rangle \\ &= \langle x, Ay \rangle \\ &= \langle x, \mu y \rangle \\ &= \mu\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

$\lambda \neq \mu$ だから,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

となり, x と y は直交する.

例　2 次の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を直交行列によって対角化してみよう.
まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - (-1)(-1) \\ &= t^2 - 2t. \end{aligned}$$

よって, A の固有値は 0 と 2.
次に, 固有値 0 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立 1 次方程式

$$-A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_1 - x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 に対する A の固有ベクトル.
更に, 固有値 2 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立 1 次方程式

$$(2E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$x_1 - x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する A の固有ベクトル.
上で得られたベクトルを正規化して並べたものを P とおく. すなわち,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, P は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 §7 において固有値と固有空間を求めた 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

は対称行列である. A を直交行列によって対角化してみよう.
まず, A の固有値は 1 と 4 で,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, 各固有値に対する固有空間はそれぞれ

$$W(1) = \{c_1u_1 + c_2u_2 | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\},\ W(4) = \{cu_3 | c \in \mathbf{R}\}$$

であった.

次に, Gram-Schmidt の直交化法を用いて, $W(1)$ の基底 $\{u_1, u_2\}$ から正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ を求めると,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} v_2' &= u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

更に, 固有値 4 に対する A の固有ベクトル u_3 を正規化したものを v_3 とおくと,

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと, P は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

問題 12

1. 次の (1), (2) により定まる対称行列 A を直交行列によって対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. ただし, A の固有値が 0 と 14 で, それぞれの固有値に対する固有空間が

$$W(0) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}, \ W(14) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}$$

であることを用いてよい.

問題 12 の解答

1. (1) まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-6 \end{vmatrix} \\ &= (t-3)(t-6)-(-2)(-2) \\ &= t^2-9t+14 \\ &= (t-2)(t-7).\end{aligned}$$

よって, A の固有値は 2 と 7.
次に, 固有値 2 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立 1 次方程式

$$(2E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_1-2x_2=0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する A の固有ベクトル.
更に, 固有値 7 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立 1 次方程式

$$(7E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1+x_2=0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対する A の固有ベクトル.
上で得られたベクトルを正規化して並べたものを P とおくと,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

このとき, P は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(2) まず,

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき, Gram-Schmidt の直交化法を用いて, $W(0)$ の基底 $\{u_1, u_2\}$ から正規直交基底

$\{v_1, v_2\}$ を求めると,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|}u_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
v_2' &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' \\
&= \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

次に, 固有値 14 に対する A の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を正規化したものを v_3 とおくと,

$$
v_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.
$$

したがって,

$$
P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}
$$

とおくと, P は直交行列で,

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.
$$