§14. 主ファイバー束

まず, ベクトル束の各ファイバーの基底をすべて集めたものを考えてみよう.

例 M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束とし, 各 $p \in M$ に対して

$$P_p = \{f : \mathbf{R}^r \to E_p | f \text{ は線形同型写像 }\}$$

とおく. P_p の各元に対して $\mathbf{R}^r$ の標準基底の行き先は E_p の基底となるから, P_p は E_p の基底全体からなる集合と同一視することができる.
また, $f \in P_p$, $X \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ とすると, $f \circ X \in P_p$ である.
ここで,

$$P = \bigcup_{p \in M} P_p$$

とおくと, P は次のようにして多様体となる.
まず, E は M 上のベクトル束だから, $p \in M$ とすると, p のある近傍 U 上で１次独立な E の切断 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_r$ が存在する. これらの切断をまとめて単に f_U と表すことにすると, 上の同一視により, f_U は各 $q \in U$ に対して線形同型写像

$$f_U(q) : \mathbf{R}^r \to E_q$$

を定める.
更に, P_q の任意の点はある $X \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ に対して $f_U(q) \circ X$ と一意的に表すことができるから,

$$\varphi_U(f_U(q) \circ X) = (q, X)$$

とおくと, φ_U は全単射

$$\varphi_U : \bigcup_{q \in U} P_q \to U \times \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$$

を定める.
よって, $U \times \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ の多様体の構造を用いて, $\bigcup_{q \in U} P_q$ に多様体の構造を定めることができる.
このとき, P は C^∞ 級多様体となることが分かる. P を E に同伴する主ファイバー束という.

上の例は次のように一般化することができる.

定義 M, P を C^∞ 級多様体, π を P から M への C^∞ 級写像, G を Lie 群とする. 次の (1)〜(4) がなりたつとき, P を M 上の主ファイバー束という.

(1) π は全射.

(2) G は P の上に右から作用する. すなわち, $(u, a) \in P \times G$ に対して $ua \in P$ を対応させる $P \times G$ から P への C^∞ 級写像が存在し, 任意の $u \in P$ および任意の $a, b \in G$ に対して

$$(ua)b = u(ab)$$

で, e を G の単位元とすると,

$$ue = u.$$

(3) 各 $p \in M$ に対して, G は $\pi^{-1}(p)$ を $\pi^{-1}(p)$ へ写し, G の $\pi^{-1}(p)$ の上への作用は単純推移的. すなわち, 任意の $u, v \in \pi^{-1}(p)$ に対して $v = ua$ となる $a \in G$ が一意的に存在する.

(4) 各 $p \in M$ に対して, p の近傍 U および $u \in \pi^{-1}(U)$ に対して $(\pi(u), \varphi(u)) \in U \times G$ を対応させる $\pi^{-1}(U)$ から $U \times G$ への C^∞ 級微分同相写像が存在し, 任意の $u \in \pi^{-1}(U)$ および任意の $a \in G$ に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u)a.$$

P を全空間, M を底空間, π を射影, G を構造群という. また, $\pi^{-1}(p)$ を P_p と表し, p 上のファイバーという.

ベクトル束の場合と同様に, 主ファイバー束に対して変換関数を考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, P を構造群を G とする M 上の主ファイバー束とする.
このとき, 上の定義の (4) より, M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在し, 任意の $\alpha \in A$ に対して, 各 $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $(\pi(u), \varphi_\alpha(u)) \in U_\alpha \times G$ を対応させる $\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $U_\alpha \times G$ への C^∞ 級微分同相写像が存在する.
ここで, $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, $a \in G$ とすると,

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(ua)\varphi_\beta(ua)^{-1} &= \varphi_\alpha(u)a(\varphi_\beta(u)a)^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(u)\varphi_\beta(u)^{-1}.\end{aligned}$$

よって, $\varphi_\alpha(u)\varphi_\beta(u)^{-1}$ は C^∞ 級写像

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

を定める. 写像の族 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対する座標変換または変換関数という.
変換関数の定義より, $\alpha, \beta, \gamma \in A$ で

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$$

ならば,

$$\varphi_{\alpha\beta}(p)\varphi_{\beta\gamma}(p) = \varphi_{\alpha\gamma}(p) \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \tag{$*$}$$

がなりたつ.
特に,

$$\varphi_{\alpha\alpha}(p) = e \quad (p \in U_\alpha)$$

および

$$\varphi_{\beta\alpha}(p) = \varphi_{\alpha\beta}(p)^{-1} \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta)$$

がなりたつ.
逆に, $(*)$ をみたす写像の族があたえられていると, ベクトル束の場合と同様に, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするような主ファイバー束を構成することができる.

例 P を上の例に現れた主ファイバー束とする. すなわち, P は M 上のベクトル束 E に同伴する主ファイバー束で, 構造群は $\mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ である.
$\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対する E の変換関数とする.
このとき, P の構成の仕方より, $\{U_\alpha\}$ に対する P の変換関数も $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ となる.

最初の例では, ベクトル束から主ファイバー束を構成したが, 逆に, 主ファイバー束と構造群の表現からベクトル束を構成することができる.
M を C^∞ 級多様体, P を構造群を G とする M 上の主ファイバー束, ρ を G の表現, すなわち G から $\mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ への準同型写像

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$$

とする.
$(u, x), (v, y) \in P \times \mathbf{R}^r$ に対して, ある $a \in G$ が存在し

$$v = ua, \quad y = \rho(a)^{-1}x$$

となるとき, $(u,x) \sim (v,y)$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は $P \times \mathbf{R}^r$ 上の同値関係となる. 商集合 $(P \times \mathbf{R}^r)/\sim$ を $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ と表す.
$(p,a,x) \in U \times G \times \mathbf{R}^r$ に対して

$$F(p,a,x) = (p, \rho(a)x)$$

とおき, $b \in G$ とすると,

$$\begin{aligned} F(p,ab,\rho(b)^{-1}x) &= (p, \rho(ab)\rho(b)^{-1}x) \\ &= (p, \rho(a)x) \\ &= F(p,a,x) \end{aligned}$$

となる. よって, P が局所的に $U \times G$ と表されるとき, 上の F を用いることにより, $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は局所的に $U \times \mathbf{R}^r$ と表される. 更に, $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は M 上のベクトル束となることが分かる. $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ を P に同伴するベクトル束という.
$\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対する P の変換関数とする. $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ の変換関数を求めてみよう.
P が局所的に $U_\alpha \times G$ と表されているとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は局所的に $U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ と表され, その対応は $(\pi(u), \varphi_\alpha(u), x) \in U_\alpha \times G \times \mathbf{R}^r$ に対して $(\pi(u), \rho(\varphi_\alpha(u))x) \in U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ を対応させることにより得られる. ただし, $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ である.
よって, $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ とすると,

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_\alpha(u))x &= \rho(\varphi_\alpha(u)\varphi_\beta^{-1}(u)\varphi_\beta(u))x \\ &= \rho(\varphi_{\alpha\beta}(u)\varphi_\beta(u))x \\ &= \rho(\varphi_{\alpha\beta}(u))\rho(\varphi_\beta(u))x. \end{aligned}$$

したがって, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対する $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ の変換関数は $\{\rho \circ \varphi_{\alpha\beta}\}$ である.

例　P を上の例に現れたベクトル束 E に同伴する主ファイバー束とし,

$$\rho : \mathrm{GL}(r, \mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(N, \mathbf{R})$$

を P の構造群 $\mathrm{GL}(r,\mathbf{R})$ の表現とする. このとき, ベクトル束 $P \times_\rho \mathbf{R}^N$ が得られる.
$N = r$ で, ρ が恒等写像のとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^N$ は元のベクトル束 E に他ならない.
$N = r$ とし, ρ を

$$\rho(a) = {}^t a^{-1} \quad (a \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{R}))$$

により定める. このとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^N$ は E の双対ベクトル束 E^* となる.
E の変換関数がある基底に関して行列を用いて $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ と表されるとき, E^* の変換関数は双対基底を選んでおけば $\{{}^t\varphi_{\alpha\beta}^{-1}\}$ となることを思い出そう.
$N = r^2$ とする. 関連事項 11 において述べた Kronecker 積を用いることにより, ρ を

$$\rho(a) = a \otimes a \quad (a \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{R}))$$

により定めることができる. このとき, $P \times_\rho \mathbf{R}^N$ は $E \otimes E$ となる.

関連事項 14. 群作用

数学的な対称性はしばしば群という代数的なものを用いて表すことができる.
例えば, 線形代数において行列式を定義する際にも現れる n 文字の置換は, 集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ から同じ集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ への全単射であるが, これら全体の集合は写像の合成に関して群となる. これを n 次の対称群という.
上の例では全単射をすべて考えたが, 集合が何らかの構造を兼ね備えている場合はその構造に伴う全単射のみを考えることが多い.
例えば, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であるから, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への全単射の中で線形なものを考えることができる. これら全体の集合は実一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ であり, 行列の積に関して群である.
群作用とは上のようなものを一般化したものである. 簡単のため, ここでは左作用の場合を考えよう.
X を集合, G を群とする. G が X の上に左から作用しているとは, 各 $(a, x) \in G \times X$ に対して $ax \in X$ を対応させる $G \times X$ から X への写像が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a, b \in G$ に対して

$$a(bx) = (ab)x$$

で, e を G の単位元とすると,

$$ex = x$$

がなりたつことをいう. X が C^∞ 級多様体で G が Lie 群の場合であれば, 通常は上の $G \times X$ から X への写像は C^∞ 級であることを要請する.
G が X の上に左から作用しているとき, 各 $a \in G$ は $x \in X$ に対して $ax \in X$ を対応させることにより X から X への写像を定めるが, これは X の全単射となる. 実際, $x \in X$ に対して $a^{-1}x \in X$ を対応させる写像が逆写像となる.
作用に関する言葉について幾つか述べよう.
各 $a \in G$ に対して $ax = x$ とすることにより, G の作用が得られる. これを自明な作用という.
任意の $x \in X$ に対して $ax = x$ となる $a \in G$ は $a = e$ のときに限るとき, G の作用は自由であるという.
任意の $x, y \in X$ に対して $y = ax$ となる $a \in G$ が存在するとき, G の作用は推移的であるという. 特に, 自由かつ推移的な作用は単純推移的である.
e と異なる任意の $a \in G$ に対して $ax \neq x$ となる $x \in X$ が存在するとき, G の作用は忠実または効果的であるという.
関連事項 4 において等質空間について述べたが, Lie 群が推移的に作用する多様体は等質空間として表される.
M を C^∞ 級多様体, G を連結な Lie 群とし, G が M の上に左から推移的に作用しているとする. $p \in M$ を固定しておき,

$$G_p = \{g \in G | gp = p\}$$

とおくと, G_p は G の閉 Lie 部分群となる. G_p を p における固定部分群という. このとき, G の等質空間 G/G_p が得られるが, $gG_p \in G/G_p$ に対して $gp \in M$ を対応させることにより定まる G/G_p から M への写像は C^∞ 級微分同相写像となることが分かる.