

§2. 直交行列

Euclid空間 \mathbf{R}^n は内積をもつベクトル空間であるから、 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^n 自身への写像の中でも、直交変換という特別な線形変換を考えることができる。ここでは \mathbf{R}^n の点は n 次の行ベクトルとするので、直交変換は直交行列を右から掛けることに相当することに注意しよう。線形代数においては実対称行列が直交行列によって対角化可能であることを扱うが、直交行列は幾何学においても重要である。

A を n 次の実正方行列とする。 A は

$${}^tAA = A^tA = E$$

をみたすとき、直交行列というのであった。ただし、 E は n 次の単位行列である。なお、上の式は ${}^tAA = E$ または $A^tA = E$ の何れか1つでもよい。

定義から直ちに分かるように、直交行列は正則で、逆行列は転置行列に一致する。また、直交行列の逆行列も直交行列である。

更に、 A, B をともに n 次の直交行列とすると、

$$\begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &= {}^tB^tAAB \\ &= {}^tBEB \\ &= {}^tBB \\ &= E \end{aligned}$$

だから、 A, B の積 AB も直交行列である。

n 次の直交行列全体の集合を $O(n)$ と表す。

上に述べたことを含め、 $O(n)$ に関して次のようにまとめることができる。

定理 $A, B, C \in O(n)$ とすると、次の (1)~(4) がなりたつ。

- (1) $AB \in O(n)$.
- (2) $(AB)C = A(BC)$ (結合律).
- (3) $E \in O(n)$ で、 $EA = AE = A$.
- (4) $A^{-1} \in O(n)$ で、 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

一般の集合に対しても上の定理の (1)~(4) のような性質をもつ積を考えると、群というものを定義することができる。 $O(n)$ を n 次の直交群という。

直交行列の行列式は1か-1である。実際、 $A \in O(n)$ とすると、直交行列の定義と行列式の性質より、

$$\begin{aligned} 1 &= |E| \\ &= |{}^tAA| \\ &= |{}^tA||A| \\ &= |A|^2 \end{aligned}$$

だから、 $|A| = \pm 1$ である。

$O(n)$ の元で行列式が1となるもの全体、すなわち行列式が1の n 次の直交行列全体の集合を $SO(n)$ と表すと、 $SO(n)$ に関して上の定理の (1)~(4) と同様の性質がなりたつ。 $SO(n)$ を n 次の特殊直交群という。

次は直交行列に関する重要な事実である。

定理 A を n 次の実正方行列とすると、次の (1)~(4) は同値.

- (1) $A \in O(n)$.
- (2) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して $\langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (3) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $\|xA\| = \|x\|$.
- (4) A の n 個の行ベクトルは \mathbf{R}^n の正規直交基底.

$A \in O(2)$ を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表しておく、直交行列の定義より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって、

$$a^2 + b^2 = 1, \quad ac + bd = 0, \quad c^2 + d^2 = 1.$$

第1式と第3式より、 $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ をみたす θ, φ を用いて、

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta, \quad c = \sin \varphi, \quad d = \cos \varphi$$

と表される.

第2式と加法公式より、

$$\sin(\theta + \varphi) = 0.$$

$0 \leq \theta + \varphi < 4\pi$ だから、

$$\theta + \varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi.$$

したがって、

$$(\sin \varphi, \cos \varphi) = \begin{cases} (-\sin \theta, \cos \theta) & (\theta + \varphi = 0, 2\pi), \\ (\sin \theta, -\cos \theta) & (\theta + \varphi = \pi, 3\pi) \end{cases}$$

だから、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \mp \sin \theta & \pm \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}).$$

$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、 $x \in \mathbf{R}^2$ に A を右から掛けることは x を原点を中心として各 θ 回転することを意味する.

$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、 $x \in \mathbf{R}^2$ に A を右から掛けることは x を直線 $x_2 \cos \frac{\theta}{2} = x_1 \sin \frac{\theta}{2}$ に関して対称移動することを意味する.

また、

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

である.

3次の直交行列について考えるため、数の範囲を複素数まで広げることにする。

A を正方行列とし、 A の転置と複素共役を取ることにより得られる行列を A^* と表す。すなわち、 A^* は A の転置行列の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列である。

A は

$$A^*A = AA^*$$

となるとき、正規行列という。特に、実対称行列、実交代行列、直交行列は正規行列である。

また、 A は

$$A^*A = AA^* = E$$

となるとき、ユニタリ行列という。上の式は $A^*A = E$ または $AA^* = E$ の何れか1つでもよい。特に、ユニタリ行列は正規行列である。 n 次のユニタリ行列全体の集合を $U(n)$ と表し、 n 次のユニタリ群という。

定理 A を正方行列とする。 A がユニタリ行列によって対角化可能であるための必要十分条件は A が正規行列であること。

$A \in O(n)$ とすると、上の定理より、

$$UAU^* = D$$

となる $U \in U(n)$ および n 次の対角行列 D が存在する。

$U \in U(n)$, $A \in O(n)$ だから、

$$\begin{aligned} DD^* &= (UAU^*)(UAU^*)^* \\ &= UAU^*U^tAU^* \\ &= E. \end{aligned}$$

よって、 D の対角成分は絶対値1の複素数となり、それらは A の固有値でもある。

$n = 3$ とすると、 A の固有方程式は実数係数の3次方程式だから、 A の固有値の1つは1か -1 で、残りの2つは $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす θ を用いて、 $\cos \theta \mp i \sin \theta$ と表される。ただし、 i は虚数単位である。

このとき、次の(1), (2)をみたす \mathbf{R}^3 の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ が存在することが分かる。

(1) u_1 は固有値1か -1 に対する A の固有ベクトル。

(2) $u_2 \pm iu_3$ は固有値 $\cos \theta \mp i \sin \theta$ に対する A の固有ベクトル。ただし、複号同順である。

更に、 $P = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ とおくと、 $P \in O(3)$ で、

$$PA^tP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることが分かる。

したがって、 $A \in SO(3)$ のときは、 A は原点を通る u_1 方向の直線を回転軸とする角 θ の回転を意味する。

以上のことから、 $SO(n)$ を回転群ともいう。

問題 2

1. $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ とし, $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) = x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

とおくと, f は \mathbf{R}^n の線形変換を定める.

- (1) f は \mathbf{R}^n の直交変換であることを示せ.
- (2) f と f 自身の合成写像 $f \circ f$ は \mathbf{R}^n の恒等変換であることを示せ.
- (3) $f(a) = -a$ だから, -1 は f の固有値である. W を固有値 -1 に対する f の固有空間とする. W を求めよ.
- (4) $n \geq 2$ とし, W^\perp を W の直交補空間, すなわち

$$W^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{任意の } y \in W \text{ に対して } \langle x, y \rangle = 0\}$$

とする. W^\perp は固有値 1 に対する f の固有空間であることを示せ. なお, f を W に関する鏡映という.

2. A, B を n 次の実正方行列とする. $A + iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $2n$ 次の正方行列 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.
3. A を n 次の複素正方行列とし, A の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列を \bar{A} と表すと, 行列式に関して $\det \bar{A} = \overline{\det A}$ がなりたつ. ただし, 右辺は $\det A$ の共役複素数である. このことを用いてユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数であることを示せ.
4. 実交代行列の固有値は純虚数であることを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, y - \frac{2\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \frac{2\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle x, a \rangle - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle a, y \rangle + \frac{4\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle^2} \langle a, a \rangle \\ &= \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

よって, f は \mathbf{R}^n の直交変換.

(2) $x \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(x) - \frac{2\langle f(x), a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a - \frac{2}{\langle a, a \rangle} \left\langle x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, a \right\rangle a \\ &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a + \frac{4\langle x, a \rangle \langle a, a \rangle}{\langle a, a \rangle^2} a \\ &= x.\end{aligned}$$

よって, $f \circ f$ は \mathbf{R}^n の恒等変換.

(3) まず, $x \in W$ とすると,

$$\begin{aligned}x &= -f(x) \\ &= -x + \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a\end{aligned}$$

だから,

$$x = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

よって, x は $t \in \mathbf{R}$ を用いて $x = ta$ と表すことができる.

逆に, $t \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}f(ta) &= ta - \frac{2\langle ta, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= -ta.\end{aligned}$$

したがって,

$$W = \{ta | t \in \mathbf{R}\}.$$

(4) $n \geq 2$ だから, $W^\perp \neq \{0\}$ であることに注意する.

まず, $x \in W^\perp$ とすると, $a \in W$ だから,

$$\begin{aligned}f(x) &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= x.\end{aligned}$$

よって, x は固有値 1 に対する f の固有空間の元.

逆に, x を固有値 1 に対する f の固有空間の元とすると, 上の計算および $a \neq 0$ より,

$$\langle x, a \rangle = 0.$$

よって, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\langle x, ta \rangle = 0.$$

すなわち, $x \in W^\perp$.

したがって, W^\perp は固有値 1 に対する f の固有空間.

2. まず,

$$\begin{aligned} (A + iB)^*(A + iB) &= ({}^tA - i{}^tB)(A + iB) \\ &= ({}^tAA + {}^tBB) + i({}^tAB - {}^tBA). \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} {}^t \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tBB & -({}^tAB - {}^tBA) \\ {}^tAB - {}^tBA & {}^tAA + {}^tBB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, $A + iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることである.

3. $A \in U(n)$ とすると, ユニタリ行列の定義と行列式の性質より,

$$\begin{aligned} 1 &= \det E \\ &= \det(A^*A) \\ &= \det A^* \det A \\ &= \det \overline{{}^tA} \det A \\ &= \overline{\det {}^tA} \det A \\ &= \overline{\det A} \det A \\ &= |\det A|^2. \end{aligned}$$

よって, $|\det A| = 1$. すなわち, ユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数.

4. A を n 次の実交代行列とすると, A は正規行列だから,

$$UAU^* = D$$

となる $U \in U(n)$ および n 次対角行列 D が存在する.

両辺の転置と複素共役を取ると, A は実交代行列で, D は対角行列だから,

$$-UAU^* = \overline{D}.$$

よって, $D = -\overline{D}$ だから, D の対角成分は純虚数.

したがって, 実交代行列の固有値は純虚数.