

### §3. 行列値関数

線形代数に現れる行列は実数や複素数を成分とすることが多いが、固有多項式を考える場合は関数を成分とする行列の行列式を考えた。すなわち、 $A$  を正方行列とすると、 $A$  の固有多項式は  $t$  を変数とする行列  $tE - A$  の行列式である。

微分積分においても重積分の変数変換公式には Jacobian という多変数関数を成分とする行列の行列式が現れた。例えば、極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

に対する Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

である。

以下ではこのような行列値関数、すなわち関数を成分とする行列を考えよう。簡単のため、1変数の場合を扱うことにする。

行列値関数の微分は成分毎に考えればよい。 $F$  を区間  $I$  で定義された行列値関数とすると、各成分が  $I$  で微分可能ならば、 $F$  は  $I$  で微分可能であるというように定めるのである。 $F$  の各成分を微分して得られる行列値関数を  $F'$  などと表す。

次の定理では行列の和や積を考えるが、そのような場合の行列の型は演算が可能なものとする。

**定理**  $F, G$  を区間  $I$  で微分可能な行列値関数とすると、次の (1)~(4) がなりたつ。

- (1)  $(F + G)' = F' + G'$ .
- (2)  $c$  を  $I$  で微分可能な関数とすると、 $(cF)' = c'F + cF'$ .
- (3)  $(FG)' = F'G + FG'$ .
- (4)  $F$  が正則行列に値をとるならば、 $(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}$ .

**証明** (4) のみ示す。

等式

$$FF^{-1} = E$$

の両辺を微分すると、(3) より、

$$F'F^{-1} + F(F^{-1})' = O.$$

ただし、 $O$  は零行列である。

上の式を変形すると、

$$(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}.$$

□

幾何学においては  $\mathbf{R}^n$  に値をとる関数の他にも直交行列や実交代行列に値をとる関数がよく現れる。その背景となるのは次の定理である。

**定理**  $F$  を区間  $I$  で微分可能な正則行列に値をとる関数とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

- (1)  $F$  が直交行列に値をとるならば、 $F'F^{-1}$  は実交代行列に値をとる。
- (2)  $F'F^{-1}$  が実交代行列に値をとり、ある  $a \in I$  に対して  $F(a)$  が直交行列となるならば、 $F$  は直交行列に値をとる。

**証明** (1):  $F^{-1} = {}^tF$  だから,

$$\begin{aligned} F'F^{-1} + {}^t(F'F^{-1}) &= F'^tF + {}^t(F'^tF) \\ &= F'^tF + F^tF' \\ &= (F^tF)' \\ &= E' \\ &= O. \end{aligned}$$

よって,  $F'F^{-1}$  は実交代行列に値をとる.

(2):  $F'F^{-1}$  が実交代行列に値をとるから,

$$\begin{aligned} O &= F'F^{-1} + {}^t(F'F^{-1}) \\ &= F'F^{-1} + {}^tF^{-1t}F' \\ &= {}^tF^{-1}({}^tFF' + {}^tF'F)F^{-1} \\ &= {}^tF^{-1}({}^tFF)'F^{-1}. \end{aligned}$$

よって,  $({}^tFF)' = O$  だから,  ${}^tFF$  は  $t \in I$  に依らない正方行列.

ここで,  $F(a)$  は直交行列だから,  ${}^tFF$  は単位行列.

したがって,  $F$  は直交行列に値をとる. □

実交代行列全体の集合は自然にベクトル空間とみなすことができるが, 直交行列全体の集合は群としての構造はもつものの, 実交代行列全体の集合よりは複雑な対象である. しかし, 次に述べる行列の指数関数を用いることにより, 実交代行列に値をとる関数から直交行列に値をとる関数を構成することができる. 以下では行列の級数が現れるが, 収束に関する厳密な議論は省略することとする.

まず, 指数関数  $e^x$  に対する Maclaurin 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を思い出そう. 右辺は任意の複素数  $x$  に対して収束することが分かる. 上の式の  $x$  に正方行列  $A$  を代入したものを考え,

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

とおく. 右辺は任意の  $A$  に対して成分毎に収束することが分かる.  $\exp A$  を  $A$  の指数関数という.

**例**  $A$  を  $(i, i)$  成分が  $\lambda_i$  の  $n$  次の対角行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表す.

$k = 0, 1, 2, \dots$  とすると,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

だから,

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

特に,

$$\exp O = E.$$

行列の指数関数に関して次は基本的である.

**定理**  $A, B$  を  $n$  次の正方行列とすると, 次の (1)~(5) がなりたつ.

(1)  $A$  と  $B$  が可換ならば,

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B).$$

(2)  $\exp A$  は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

(3)  $\exp {}^t A = {}^t(\exp A)$ .

(4)  $\exp \bar{A} = \overline{\exp A}$ .

(5)  $P$  を  $n$  次の正則行列とすると,

$$\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}.$$

**証明** (2) のみ示す.

$A$  と  $-A$  は可換だから, (1) より,

$$\begin{aligned} (\exp A) \exp(-A) &= \exp(A - A) \\ &= \exp O \\ &= E. \end{aligned}$$

よって,  $\exp A$  は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

□

上の定理の (2), (3) を用いると, 次を示すことができる.

**定理**  $A$  が実交代行列ならば,  $\exp A$  は直交行列.

**証明**  ${}^t A = -A$  だから,

$$\begin{aligned} {}^t(\exp A) &= \exp {}^t A \\ &= \exp(-A) \\ &= (\exp A)^{-1}. \end{aligned}$$

よって,  $\exp A$  は直交行列.

□

## 問題 3

1.  $x, y$  を区間  $I$  で微分可能な  $\mathbf{R}^n$  に値をとる関数とすると,

$$\langle x, y \rangle' = \langle x', y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. 三角関数  $\sin x, \cos x$  に対して Maclaurin 展開

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

がなりたつ.

(1) Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を示せ.

(2)  $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  を求めよ.

(3) 2 次の正方行列  $A, B$  を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める.  $(\exp A)(\exp B), (\exp B)(\exp A), \exp(A+B)$  を求めよ.

(4)  $m$  を 0 でない整数とする.  $a, b, c$  が  $a^2 + bc = -m^2\pi^2$  をみたすとき,  $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  を求めよ.

3.  $A$  を正方行列とし, 区間  $I$  で定義された行列値関数  $F$  を

$$F(t) = \exp(tA) \quad (t \in I)$$

により定める.  $F'F^{-1}$  および  $F^{-1}F'$  を求めよ.

## 問題3の解答

1. 内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle' &= (x^t y)' \\ &= x'^t y + x^t y' \\ &= \langle x', y \rangle + \langle x, y' \rangle.\end{aligned}$$

2. (1) 指数法則を用いて左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ$$

と表しておく. ただし,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$aE$  と  $bJ$  は可換で,  $J^2 = -E$  だから,

$$\begin{aligned}\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp(aE) \exp(bJ) \\ &= e^a \exp(bJ) \\ &= e^a \left( E + bJ - \frac{b^2}{2!} E - \frac{b^3}{3!} J + \dots \right) \\ &= e^a \left( 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots \right) E + e^a \left( b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \dots \right) J \\ &= e^a (\cos b) E + e^a (\sin b) J \\ &= \begin{pmatrix} e^a \cos b & e^a \sin b \\ -e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) まず,

$$A^2 = B^2 = O$$

だから,

$$\begin{aligned}(\exp A)(\exp B) &= (E + A)(E + B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\exp B)(\exp A) &= (E + B)(E + A) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

次に, (2) より,

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) まず,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

とおくと, 仮定より,

$$A^2 = -m^2\pi^2 E.$$

よって,

$$\begin{aligned} \exp A &= E + A - \frac{m^2\pi^2}{2!}E - \frac{m^2\pi^2}{3!}A + \dots \\ &= \left(1 - \frac{m^2\pi^2}{2!} + \frac{m^4\pi^4}{4!} - \dots\right)E + \frac{1}{m\pi} \left(m\pi - \frac{m^3\pi^3}{3!} + \frac{m^5\pi^5}{5!} - \dots\right)A \\ &= (\cos m\pi)E + \frac{\sin m\pi}{m\pi}A \\ &= \begin{cases} E & (m \text{ は偶数}), \\ -E & (m \text{ は奇数}). \end{cases} \end{aligned}$$

3. まず,

$$F = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

だから,

$$F' = AF = FA.$$

よって,

$$F'F^{-1} = F^{-1}F' = A.$$