§8. 平面曲線の基本定理

平面曲線に対してはその曲がり具合を表す量として曲率という関数が定まり, 曲線は回転と平行移動を除いて曲率によって決まることが分かる. これが平面曲線の基本定理である.
平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を考える. §7 において扱ったように, 写像としての曲線の像を調べるには γ は弧長により径数付けられているとしてよい.
まず, $e = \gamma'$ とおく. なお, 弧長径数に関する微分は $'$ を用いて表すことにする. また, 弧長径数は記号 s を用いることにする. γ は弧長により径数付けられているから, 任意の $s \in I$ に対して

$$\|\gamma'(s)\| = 1.$$

すなわち,

$$\|e(s)\|^2 = 1$$

である. $e(s)$ を $\gamma(s)$ における単位接ベクトルという.
上の式の両辺を s で微分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\|e\|^2\right)' \\ &= \langle e, e \rangle' \\ &= \langle e', e \rangle + \langle e, e' \rangle \\ &= 2\langle e', e \rangle \end{aligned}$$

だから,

$$\langle e', e \rangle = 0.$$

すなわち, $e'(s)$ は $e(s)$ と直交する.
ここで, $e(s)$ を反時計回りに角 $\frac{\pi}{2}$ 回転して得られるベクトルを $n(s)$ とおく. 定義より,

$$\|n(s)\| = 1$$

である.
$n(s)$ は写像

$$n : I \to \mathbf{R}^2$$

を定め,

$$e(s) \perp n(s),\ \det \begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = 1$$

または

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

によって特徴付けることができる. $n(s)$ を $\gamma(s)$ における単位法線ベクトルまたは単に単位法ベクトルという.
$\{e(s), n(s)\}$ は $\mathbf{R}^2$ の正規直交基底となるが, $e'(s)$ は $e(s)$ と直交するから, ある $\kappa(s) \in \mathbf{R}$ が存在し

$$e'(s) = \kappa(s) n(s)$$

と表すことができる. $\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ における曲率という.
$\kappa(s)$ は関数

$$\kappa : I \to \mathbf{R}$$

を定める. κ を γ の曲率という.
また,

$$\|n(s)\|^2 = 1$$

だから, 両辺を s で微分すると, 始めの計算と同様に,

$$\langle n', n\rangle = 0.$$

すなわち, $n'(s)$ は $n(s)$ と直交する.
更に,

$$\langle e(s), n(s)\rangle = 0$$

だから, 両辺を s で微分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e, n\rangle' \\ &= \langle e', n\rangle + \langle e, n'\rangle \\ &= \langle \kappa n, n\rangle + \langle n', e\rangle \\ &= \kappa\langle n, n\rangle + \langle n', e\rangle \\ &= \kappa \cdot 1 + \langle n', e\rangle \\ &= \kappa + \langle n', e\rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\langle n', e\rangle = -\kappa.$$

$\{e(s), n(s)\}$ は $\mathbf{R}^2$ の正規直交基底となるが, $n'(s)$ は $n(s)$ と直交するから,

$$n'(s) = -\kappa(s)e(s)$$

となる.
I から $\mathbf{R}^2$ への写像の組 $\{e, n\}$ を Frenet の標構という. また, 上の計算より得られる Frenet の標構 $\{e, n\}$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e \end{cases}$$

を Frenet の公式という. e, n は $\mathbf{R}^2$ に値をとるが, Frenet の公式は線形微分方程式で, 初期値問題に対する解の存在と一意性がなりたつ.
なお, 正則な平面曲線が必ずしも弧長により径数付けられていない場合は, §7 において扱ったように変数変換を行い, 改めて弧長により径数付けることにより曲率を計算すればよい.
最後に平面曲線の基本定理を示そう.

平面曲線の基本定理 κ を区間 I で定義された実数値関数とすると, 曲率が κ の弧長により径数付けられた平面曲線が回転と平行移動の合成を除いて一意的に存在する.

証明 まず, Frenet の公式は

$$\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$$

と表される線形微分方程式だから, $s_0 \in I$ および $A \in \mathrm{SO}(2)$ を固定しておくと, 微分方程式の解の存在定理より, 初期条件を

$$\begin{pmatrix} e(s_0) \\ n(s_0) \end{pmatrix} = A$$

とする解 e, n が存在する.
ここで, $\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$ は実交代行列に値をとり, $A \in \mathrm{SO}(2)$ だから, §3 において扱ったことより, $\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ は $\mathrm{SO}(2)$ に値をとる.
よって, 平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} e(s)ds \quad (s \in I)$$

により定めると, γ は曲率が κ の弧長により径数付けられた曲線となり, $\{e, n\}$ は γ に対する Frenet の標構である.
次に, $\gamma, \tilde{\gamma}$ をともに曲率が κ の弧長により径数付けられた平面曲線, $\{e, n\}, \{\tilde{e}, \tilde{n}\}$ をそれぞれ $\gamma, \tilde{\gamma}$ に対する Frenet の標構とする.
任意の $s \in I$ に対して

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{e}(s) \\ \tilde{n}(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

だから, $s_0 \in I$ を固定しておくと, ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ および $v \in \mathbf{R}^2$ が存在し

$$\tilde{e}(s_0) = e(s_0)A,\ \tilde{n}(s_0) = n(s_0)A,\ \tilde{\gamma}(s_0) = \gamma(s_0)A + v.$$

Frenet の公式より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\|\tilde{e} - eA\|^2 + \|\tilde{n} - nA\|^2\right) &= 2\langle \tilde{e}' - e'A, \tilde{e} - eA\rangle + 2\langle \tilde{n}' - n'A, \tilde{n} - nA\rangle \\ &= 2\langle \kappa\tilde{n} - \kappa nA, \tilde{e} - eA\rangle + 2\langle -\kappa\tilde{e} + \kappa eA, \tilde{n} - nA\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, 関数

$$\|\tilde{e} - eA\|^2 + \|\tilde{n} - nA\|^2$$

は定数.
更に,

$$\|\tilde{e}(s_0) - e(s_0)A\|^2 + \|\tilde{n}(s_0) - n(s_0)A\|^2 = 0$$

だから,

$$\tilde{e} = eA.$$

よって,

$$\tilde{\gamma} = \gamma A + v.$$

したがって, 曲率が κ の弧長により径数付けられた平面曲線は回転と平行移動の合成を除いて一意的. □

問題 8

1. 弧長により径数付けられた平面曲線 γ の曲率 κ は

$$\kappa = \det \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix}$$

によりあたえられることを示せ.

2. 平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

の曲率を κ とする.

(1) κ は

$$\kappa = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix}$$

によりあたえられることを示せ.

(2) γ が関数のグラフとして

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad (t \in I)$$

により定められるとき,

$$\kappa = \frac{\ddot{f}}{\left\{1 + \left(\dot{f}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

であることを示せ.

(3) γ が

$$\gamma(t) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t) \quad (t \in I)$$

により定められるとき,

$$\kappa = \frac{f^2 + 2\left(\dot{f}\right)^2 - f\ddot{f}}{\left\{f^2 + \left(\dot{f}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

であることを示せ. ただし, 右辺の分母は 0 ではないとする.

3. 曲率 κ の弧長により径数付けられた平面曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して平面曲線

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t + a + b) \quad (t \in [a, b])$$

により定める.

(1) $\tilde{\gamma}$ は弧長により径数付けられていることを示せ.

(2) $t \in [a, b]$ とする. $\tilde{\gamma}$ の $\tilde{\gamma}(t)$ における曲率を求めよ.

問題 8 の解答

1. $\{e, n\}$ を γ に対する Frenet の標構とすると, $e = \gamma'$ だから, Frenet の公式より,

$$\begin{aligned} \gamma'' &= e' \\ &= \kappa n. \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ は SO(2) に値をとる関数だから,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} e \\ \kappa n \end{pmatrix} \\ &= \kappa \det \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

2. (1) $t_0 \in I$ を固定しておき, $t \in I$ に対して $L(t)$ を γ の t_0 から t までの長さとする.
このとき, $L(t)$ は I で定義された関数 L を定める.
また, L による I の像を J とおくと, J は区間で, 関数

$$L : I \to J$$

の逆関数 L^{-1} が存在する.
更に, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ L^{-1}$ とおくと, $\tilde{\gamma}$ は弧長により径数付けられた曲線で, γ と $\tilde{\gamma}$ の像は同じである.
このとき,

$$\tilde{\gamma}' = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'' &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right)' \\ &= \frac{\dot{\gamma}'}{\|\dot{\gamma}\|} + \left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \right)' \dot{\gamma} \\ &= \frac{\ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \right)' \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \kappa &= \det \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}' \\ \tilde{\gamma}'' \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \\ \dfrac{\ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|^2} + \left(\dfrac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \right)' \dot{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) まず,

$$\dot{\gamma} = (1, \dot{f}),\ \ddot{\gamma} = (0, \ddot{f}).$$

よって, (1) より,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\ddot{f}}{\left\{1 + \left(\dot{f}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

(3) まず,

$$\dot{\gamma} = (\dot{f}\cos t - f\sin t, \dot{f}\sin t + f\cos t).$$

更に,

$$\ddot{\gamma} = (\ddot{f}\cos t - 2\dot{f}\sin t - f\cos t, \ddot{f}\sin t + 2\dot{f}\cos t - f\sin t).$$

よって,

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}\|^2 &= (\dot{f}\cos t - f\sin t)^2 + (\dot{f}\sin t + f\cos t)^2 \\ &= f^2 + \left(\dot{f}\right)^2.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} &= (\dot{f}\cos t - f\sin t)(\ddot{f}\sin t + 2\dot{f}\cos t - f\sin t) \\ &\quad - (\dot{f}\sin t + f\cos t)(\ddot{f}\cos t - 2\dot{f}\sin t - f\cos t) \\ &= f^2 + 2\left(\dot{f}\right)^2 - f\ddot{f}.\end{aligned}$$

したがって, (1) より,

$$\kappa = \frac{f^2 + 2\left(\dot{f}\right)^2 - f\ddot{f}}{\left\{f^2 + \left(\dot{f}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

3. (1) γ は弧長により径数付けられた曲線で,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -\gamma'(-t + a + b)$$

だから,

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = 1.$$

よって, $\tilde{\gamma}$ は弧長により径数付けられている.

(2) 求める曲率は

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'(t) \\ \tilde{\gamma}''(t) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -\gamma'(-t + a + b) \\ \gamma''(-t + a + b) \end{pmatrix} \\ &= -\kappa(-t + a + b).\end{aligned}$$