§11. 空間曲線の基本定理

平面曲線の局所的な性質として §8 において基本定理を扱い, 平面曲線は回転と平行移動を除いて曲率によって決まることを述べたが, ここでは空間曲線の局所的な性質を調べよう. 空間曲線に対しても曲率という関数を定めることができるが, 議論を平面曲線の場合と平行して行うために曲率が消えないという仮定を加える. このとき, 捩率という関数を定めることができる. 更に, 空間曲線は回転と平行移動を除いて曲率と捩率によって決まることが分かるが, これが空間曲線の基本定理である.
弧長により径数付けられた空間曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を考える.
まず, $e = \gamma'$ とおくと, 任意の $s \in I$ に対して

$$\|\gamma'(s)\| = 1.$$

すなわち,

$$\|e(s)\|^2 = 1$$

である. 平面曲線の場合と同様に, $e(s)$ を $\gamma(s)$ における単位接ベクトルという.
上の式の両辺を s で微分すると,

$$\langle e', e \rangle = 0$$

となるから, $e'(s)$ は $e(s)$ と直交する.
平面曲線の場合は単位接ベクトルを反時計回りに角 $\frac{\pi}{2}$ 回転して単位法ベクトルを定めたが, 空間曲線の場合には同じようなことはできない.
そこで, $e'(s)$ が $e(s)$ と直交することに注目し, 以下では任意の $s \in I$ に対して $e'(s) \neq 0$, すなわち $\gamma''(s) \neq 0$ であると仮定する. このとき,

$$n(s) = \frac{e'(s)}{\|e'(s)\|}$$

とおくことができる. $n(s)$ を $\gamma(s)$ における主法線ベクトルという.
定義より,

$$\|n(s)\| = 1$$

で,

$$\kappa(s) = \|e'(s)\|$$

とおくと,

$$e'(s) = \kappa(s) n(s)$$

である. この式の形は平面曲線に対する Frenet の公式の 1 つめと同じであるが, 空間曲線の場合は $n(s)$ を定めるために $\kappa(s) > 0$ と仮定していることに注意しよう. $\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ における曲率という.
$\kappa(s)$ は関数

$$\kappa : I \to \mathbf{R}$$

を定める. κ を γ の曲率という.
次に, §1 においても述べた $\mathbf{R}^3$ の外積 $\times$ を用いて,

$$b(s) = e(s) \times n(s)$$

とおく. $b(s)$ を $\gamma(s)$ における従法線ベクトルという.
$e(s), n(s), b(s)$ の定義より, $\{e(s), n(s), b(s)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となり, 更に外積の性質より,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} &= \langle e(s) \times n(s), b(s) \rangle \\ &= \langle b(s), b(s) \rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

である. すなわち, $e(s), n(s), b(s)$ は SO(3) に値をとる関数 $\begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}$ を定める. 組 $\{e, n, b\}$ を Frenet の標構という.
ここで,

$$\|n(s)\| = 1$$

だから,

$$\langle n', n \rangle = 0.$$

すなわち, $n'(s)$ は $n(s)$ と直交する.
また,

$$\langle e(s), n(s) \rangle = 0$$

だから, 両辺を s で微分すると,

$$\begin{aligned}0 &= \langle e, n \rangle' \\ &= \langle e', n \rangle + \langle e, n' \rangle \\ &= \langle \kappa n, n \rangle + \langle n', e \rangle \\ &= \kappa \langle n, n \rangle + \langle n', e \rangle \\ &= \kappa + \langle n', e \rangle.\end{aligned}$$

よって, ある関数

$$\tau : I \to \mathbf{R}$$

が存在し

$$n' = -\kappa e + \tau b$$

と表すことができる. τ を γ の捩率という.
更に,

$$\langle b, e \rangle = 0, \ \langle b, n \rangle = 0, \ \langle b, b \rangle = 1$$

の両辺をそれぞれ s で微分すると,

$$\langle b', e \rangle = 0, \ \langle b', n \rangle + \tau = 0, \ \langle b', b \rangle = 0$$

となるから,

$$b' = -\tau n.$$

したがって, Frenet の標構 $\{e, n, b\}$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e + \tau b, \\ b' = -\tau n \end{cases}$$

が得られた．これを Frenet-Serret の公式という．Frenet-Serret の公式は線形微分方程式で, 初期値問題に対する解の存在と一意性がなりたつ.

また, 正則な空間曲線が必ずしも弧長により径数付けられていない場合は, 改めて弧長により径数付けることにより, 上のような計算を行えばよい.

空間曲線の基本定理は次のように述べることができる.

空間曲線の基本定理　κ および τ を区間 I で定義された実数値関数とし, κ は常に正であるとする．このとき, 曲率が κ, 捩率が τ の弧長により径数付けられた空間曲線が回転と平行移動の合成を除いて一意的に存在する.

証明　まず, Frenet-Serret の公式は

$$\begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

と表される線形微分方程式だから, $s_0 \in I$ および $A \in \mathrm{SO}(3)$ を固定しておくと, 微分方程式の解の存在定理より, 初期条件を

$$\begin{pmatrix} e(s_0) \\ n(s_0) \\ b(s_0) \end{pmatrix} = A$$

とする解 e, n, b が存在する.

ここで, $\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$ は実交代行列に値をとり, $A \in \mathrm{SO}(3)$ だから, $\begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}$ は $\mathrm{SO}(3)$ に値をとる.

よって, 空間曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} e(s)ds \quad (s \in I)$$

により定めると, γ は曲率が κ, 捩率が τ の弧長により径数付けられた曲線となり, $\{e, n, b\}$ は γ に対する Frenet の標構である.

回転と平行移動の合成を除く一意性についても平面曲線の基本定理の場合と同様に示すことができる. □

問題 11

1. $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ とし, 空間曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, s は弧長径数であることが分かる. γ を常螺旋という.

(1) γ の曲率を求め, 更に曲率が常に正であることを示せ.

(2) γ の捩率を求めよ.

2. 空間曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

の曲率を κ, 捩率を τ とする.

(1) κ は

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

によりあたえられることを示せ.

(2) τ は

$$\tau = \frac{1}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma} \end{pmatrix}$$

によりあたえられることを示せ.

問題 11 の解答

1. (1) $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $e = \gamma'$ とおくと,

$$e = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right).$$

よって,

$$e' = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right).$$

したがって,

$$\|e'\|^2 = \frac{a^2}{c^4}.$$

κ を γ の曲率とすると, $a > 0$ だから,

$$\begin{aligned} \kappa &= \|e'\| \\ &= \frac{a}{c^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

(2) $\{e, n, b\}$ を γ に対する Frenet の標構とすると, (1) より,

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\kappa} e' \\ &= \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} b &= e \times n \\ &= \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right) \times \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\sin \frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{b}{c} & -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} \\ 0 & -\cos \frac{s}{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} & \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} \\ -\cos \frac{s}{c} & -\sin \frac{s}{c} \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} b' &= \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\ &= -\frac{b}{c^2} n. \end{aligned}$$

したがって, τ を γ の捩率とすると,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{b}{c^2} \\ &= \frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

2. (1) $t \in I$ とする．弧長径数 s を用いて曲線を表しておき，$\{e, n, b\}$ を Frenet の標構とすると，

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \gamma' \frac{ds}{dt} \\ &= e\frac{ds}{dt}.\end{aligned}$$

よって，

$$\|\dot{\gamma}\| = \frac{ds}{dt}.$$

Frenet-Serret の公式より，

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} &= e'\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + e\frac{d^2 s}{dt^2} \\ &= \kappa n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + e\frac{d^2 s}{dt^2}\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} &= e\frac{ds}{dt} \times \left\{\kappa n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + e\frac{d^2 s}{dt^2}\right\} \\ &= \kappa b\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.\end{aligned}$$

したがって，

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

だから，

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}.$$

(2) (1) の計算および Frenet-Serret の公式より，

$$\dddot{\gamma} = \alpha e + \beta n + \kappa\tau\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 b$$

と表すことができる．ただし，α, β は I で定義された関数．
よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma}\end{pmatrix} &= \frac{1}{\kappa^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}\det\begin{pmatrix} e\frac{ds}{dt} \\ \kappa n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + e\frac{d^2 s}{dt^2} \\ \alpha e + \beta n + \kappa\tau\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 b\end{pmatrix} \\ &= \tau\det\begin{pmatrix} e \\ n \\ b\end{pmatrix} \\ &= \tau.\end{aligned}$$