§2. 線形写像としての微分

1 変数関数 f の導関数 f' は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

により定められるのであった. n 変数関数に対しても同じようなことが考えられるであろうか. 上の式の右辺では実数 h で割るという操作を行っているので, そのまま一般化することはできない. そこで, 上の式が Landau の記号を用いて

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad (h \to 0)$$

と書き替えられることに注意しよう. すると, 問題 1 においても現れた全微分可能の概念を定めることができる. なお, ここでは全微分可能を単に微分可能ということにする. また, 簡単のため $\mathbf{R}^n$ 全体で定義された実数値関数の微分可能性について述べることにする.

定義　f を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とし, $p \in \mathbf{R}^n$ とする. ある n 次列ベクトル c が存在し

$$f(p+h) - f(p) = hc + o(\|h\|) \quad (h \to 0)$$

となるとき, f は p で微分可能であるという. このとき, $c = f'(p)$ と表し, f の p における微分係数という.
f が任意の $x \in \mathbf{R}^n$ で微分可能なとき, n 次列ベクトルに値をとる関数 f' を f の導関数という.

注意　ここでは $\mathbf{R}^n$ の元は行ベクトルで表しているので, 上の c は n 次列ベクトルとなっている.

次の定理も多変数の微分積分において学ぶことである.

定理　f を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とする. f の導関数 f' が存在するならば, f は $\mathbf{R}^n$ の各座標について偏微分可能で,

$$f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

多変数ベクトル値関数の微分についても同様に考えることができる.

定義　f を $\mathbf{R}^n$ で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとる関数とし, $p \in \mathbf{R}^n$ とする. ある $n \times m$ 行列 M が存在し

$$f(p+h) - f(p) = hM + o(\|h\|) \quad (h \to 0)$$

となるとき, f は p で微分可能であるという. このとき, $M = f'(p)$ と表し, f の p における微分係数という.
f が任意の $x \in \mathbf{R}^n$ で微分可能なとき, $n \times m$ 行列に値をとる関数 f' を f の導関数という.

定理　f を $\mathbf{R}^n$ で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとる関数とし,

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

と表しておく. f の導関数 f' が存在するならば, f は $\mathbf{R}^n$ の各座標について偏微分可能で,

$$f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

上の式を Jf とも表し, Jacobi 行列という. $n = m$ のとき, Jf の行列式は f の Jacobian となり, 重積分に対する変数変換公式に現れるものである.

Jacobi 行列は次のようにして, $\mathbf{R}^n$ の接空間から $\mathbf{R}^m$ の接空間への線形写像を表す行列と考えることができる. すなわち, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像に対して, $\mathbf{R}^n$ の接空間から $\mathbf{R}^m$ の接空間への線形写像が対応するのである.

$p \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき, I を 0 を含む区間とする. また, $\gamma(0) = p$ となる $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. §1 において扱ったように, このとき p における接ベクトル

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

を対応させることができる.

ここで, f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像とし, $q = f(p)$ とおく. このとき, $\mathbf{R}^m$ 内の曲線

$$f \circ \gamma : I \to \mathbf{R}^m$$

を考えると,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(0) &= f(\gamma(0)) \\ &= f(p) \\ &= q \end{aligned}$$

である. 更に, $f \circ \gamma$ から定まる接ベクトル $v_{f\circ\gamma}$ を求めてみよう. f および $f \circ \gamma$ をそれぞれ

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

$$(f \circ \gamma)(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく.

$j = 1, 2, \ldots, m$ とすると, 合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \frac{d}{dt} f_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} v_{f\circ\gamma} &= \sum_{j=1}^{m} \dot{y}_j(0)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q. \end{aligned}$$

特に, v_γ から $v_{f\circ\gamma}$ への対応は $T_p\mathbf{R}^n$ から $T_q\mathbf{R}^m$ への線形写像を定める. これを $(df)_p$ と表すことにする.

$T_p\mathbf{R}^n$, $T_q\mathbf{R}^m$ の基底として, それぞれ

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\},\ \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_q\right\}$$

を選んでおき, この基底に関する $(df)_p$ の表現行列を A とする. ただし, ここでは

$$\begin{pmatrix} (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p\right) \\ (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right) \\ \vdots \\ (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_q \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_q \end{pmatrix}$$

をみたす A を表現行列の定義とする. このとき, 上の計算より, A はまさに f の p における Jacobi 行列 $(Jf)_p$ に他ならない.
最後に多変数ベクトル値関数に対する連鎖律, すなわち合成関数の微分法について述べておこう.

連鎖律　f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像, g を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^l$ への微分可能な写像とする. $p \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$(d(g\circ f))_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

$T_p\mathbf{R}^n$, $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ の基底を上のように選んでおき, $\mathbf{R}^l$ の座標を $(z_1, z_2, \dots, z_l)$ とし, $T_{(g\circ f)(p)}\mathbf{R}^l$ の基底を

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_{(g\circ f)(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)_{(g\circ f)(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial z_l}\right)_{(g\circ f)(p)}\right\}$$

と選んでおくと, 連鎖律は Jacobi 行列を用いて,

$$(J(g\circ f))_p = (Jf)_p(Jg)_{f(p)}$$

と表されることが分かる. これを更に具体的に表せば, 微分積分において学ぶ合成関数の微分法に現れる式となる.

問題 2

1. A を $n \times m$ 行列とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f を

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. f の Jacobi 行列を求めよ.

2. $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f を

$$f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \quad ((r, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R})$$

により定める. このとき, (r, θ, z) を用いて $\mathbf{R}^3$ の点を表すことができる. (r, θ, z) を円柱座標という.

(1) f の Jacobi 行列を求めよ.
(2) f の Jacobian を求めよ.

3. O を $\mathbf{R}^3$ の原点とする. $\mathrm{P}(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ とし, 線分 OP の長さを r とおく. 次に, z 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. 更に, P の xy 平面への射影を Q とし, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とのなす角を φ とおく. ただし, θ, φ はそれぞれ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲に選んでおく. このとき,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \ y = r\sin\theta\sin\varphi, \ z = r\cos\theta$$

がなりたつ. (r, θ, φ) を空間極座標という.
空間極座標を用いて, $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 f を

$$f(r, \theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

$$((r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

により定める.

(1) f の Jacobi 行列を求めよ.
(2) f の Jacobian を求めよ.

4. f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への微分可能な写像とし, $p \in \mathbf{R}^n$ を固定しておく.

(1) f が恒等写像のとき, $(df)_p$ および $(Jf)_p$ を求めよ.
(2) f の逆写像 f^{-1} が存在し, f^{-1} が微分可能なとき,

$$(df^{-1})_{f(p)} = (df)_p^{-1}$$

および

$$(Jf^{-1})_{f(p)} = (Jf)_p^{-1}$$

がなりたつことを示せ.

5. f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像とする. f の逆写像 f^{-1} が存在し, f^{-1} が微分可能ならば, $n = m$ であることを示せ.

問題 2 の解答

1. $p, h \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f(p+h) - f(p) &= (p+h)A - pA \\ &= hA. \end{aligned}$$

よって, f の Jacobi 行列は A.

2. (1) 求める Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial z} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 第 3 列に関する余因子展開より, 求める Jacobian は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (\cos\theta)(r\cos\theta) - (\sin\theta)(-r\sin\theta) \\ &= r. \end{aligned}$$

3. (1) 求める Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 第 3 列に関する余因子展開より, 求める Jacobian は

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} - (-r\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= (\cos\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi) \\ &\quad + (r\sin\theta)(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

4. (1) f を

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

と表しておくと, f は恒等写像だから,

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n).$$

よって, Kronecker の δ を用いると,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

したがって, $(Jf)_p$ は単位行列で, $(df)_p$ は $T_p\mathbf{R}^n$ の上の恒等変換である.

(2) $\mathbf{R}^n$ の上の恒等写像を $1_{\mathbf{R}^n}$ と表すと,

$$f^{-1} \circ f = 1_{\mathbf{R}^n},\ f \circ f^{-1} = 1_{\mathbf{R}^n}.$$

よって, (1) と連鎖律より,

$$(df^{-1})_{f(p)} \circ (df)_p = 1_{T_p\mathbf{R}^n},\ (df)_p \circ (df^{-1})_{f(p)} = 1_{T_{f(p)}\mathbf{R}^n}.$$

ただし, $1_{T_p\mathbf{R}^n}, 1_{T_{f(p)}\mathbf{R}^n}$ はそれぞれ $T_p\mathbf{R}^n, T_{f(p)}\mathbf{R}^n$ の上の恒等変換.
したがって,

$$(df^{-1})_{f(p)} = (df)_p^{-1}.$$

更に, n 次単位行列を E と表すと, $(Jf)_p$, $(Jf^{-1})_{f(p)}$ はともに n 次の正方行列で,

$$(Jf)_p(Jf^{-1})_{f(p)} = E.$$

よって,

$$(Jf^{-1})_{f(p)} = (Jf)_p^{-1}.$$

5. $f^{-1} \circ f$, $f \circ f^{-1}$ はそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の上の恒等写像だから, 連鎖律より,

$$(df^{-1})_{f(p)} \circ (df)_p = 1_{T_p\mathbf{R}^n},\ (df)_p \circ (df^{-1})_{f(p)} = 1_{T_{f(p)}\mathbf{R}^m}.$$

ただし, $1_{T_p\mathbf{R}^n}$, $1_{T_{f(p)}\mathbf{R}^m}$ はそれぞれ $T_p\mathbf{R}^n$, $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ の上の恒等変換.
第 1 式より,

$$(df)_p(v) = 0 \quad (v \in T_p\mathbf{R}^n)$$

とすると, $v = 0$ だから, $(df)_p$ は単射.
よって,

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{rank}(df)_p \\ &\leq m. \end{aligned}$$

同様に, 第 2 式より,

$$m \leq n.$$

したがって,

$$n = m.$$