

## §3. 逆写像定理

ここでは多様体論における基本的な定理である逆写像定理について述べよう. なお, 逆写像定理は逆関数定理ということもある.

まず, 次の例から始めよう.

**例**  $A$  を  $n$  次の正方行列とし,  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への写像  $f$  を

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.

線形代数において学ぶことより,  $f$  が逆写像  $f^{-1}$  をもつための必要十分条件は  $A$  が正則行列であること, すなわち  $A$  の行列式が 0 とならないことである. また, 問題 2 において扱ったことより, この条件は  $f$  の Jacobian が 0 とならないことと言い替えることができる.

逆写像定理とは大雑把に言えば, 上の例の  $f$  が線形とは限らない微分可能な写像の場合に一般化したものである. ここでは, 多変数の微分積分において学ぶ陰関数定理から出発して, 逆写像定理を示すことにする.

**陰関数定理**  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  とし,  $(a, b)$  の近くで  $C^1$  級の 2 変数関数  $f$  が

$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0$$

をみたすとする. このとき,  $\varphi(a) = b$  をみたし  $a$  の近くで  $C^1$  級の 1 変数関数  $\varphi$  が一意的に存在し,

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

なお, 上の  $\varphi$  を  $f = 0$  の陰関数というのであった. また,  $f$  が  $C^r$  級ならば,  $\varphi$  も  $C^r$  級となる.

上の陰関数定理は次のように自然に一般化することができる.

まず,  $n, m \in \mathbf{N}$  とし,  $\mathbf{R}^{n+m}$  の点を上のように  $(x, y)$  ( $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$ ) と表すことにしよう. また,  $(a, b) \in \mathbf{R}^{n+m}$  を固定しておき,  $f$  を  $(a, b)$  の近くで  $C^1$  級の  $\mathbf{R}^m$  に値をとる  $(n+m)$  変数関数とする. 更に,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_m} & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

とも表すことにする. このとき,  $f = 0$  の陰関数の存在について, 次がなりたつ.

**陰関数定理**  $f$  が

$$f(a, b) = 0, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \neq 0$$

をみたすとする. このとき,  $\varphi(a) = b$  をみたし,  $a$  の近くで  $C^1$  級の  $\mathbf{R}^m$  に値をとる  $n$  変数関数  $\varphi$  が一意的に存在し,

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1}.$$

更に,  $f$  が  $C^r$  級ならば,  $\varphi$  も  $C^r$  級となる.

**例**  $A$  を  $n \times m$  行列,  $B$  を  $m$  次の正方行列とし,  $c \in \mathbf{R}^m$  とする.  $\mathbf{R}^{n+m}$  から  $\mathbf{R}^m$  への写像  $f$  を

$$f(x, y) = xA + yB + c \quad (x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m)$$

により定める.

このとき,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B$$

だから,  $B$  が正則ならば,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \neq 0$$

である.

しかし, この場合はわざわざ陰関数定理を用いなくとも,  $f(x, y) = 0$  は  $y$  について解くことができ, 陰関数  $\varphi$  は

$$\varphi(x) = -(xA + c)B^{-1}$$

となる.

よって,

$$\varphi'(x) = -AB^{-1}$$

も直接計算することができる.

では, 上の2つめの陰関数定理を用いて, 逆写像定理を示そう.

**逆写像定理**  $a \in \mathbf{R}^n$  とし,  $f$  を  $a$  の近くで  $C^1$  級の  $\mathbf{R}^n$  に値をとる  $n$  変数関数とする.  $f$  が

$$|(Jf)_a| \neq 0$$

をみたすならば,  $f(a)$  の近くで  $C^1$  級の  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  が存在し,

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}.$$

更に,  $f$  が  $C^r$  級ならば,  $f^{-1}$  も  $C^r$  級となる.

**証明**  $f$  の定義域を  $U$  とする.

$b = f(a)$  とおき,  $\mathbf{R}^n \times U$  で定義された  $\mathbf{R}^n$  に値をとる  $2n$  変数関数  $F$  を

$$F(y, x) = f(x) - y \quad (y \in \mathbf{R}^n, x \in U)$$

により定める.

このとき,

$$\begin{aligned} F(b, a) &= f(a) - b \\ &= 0. \end{aligned}$$

また,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Jf$$

だから, 仮定より,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(b, a) \right| \neq 0.$$

よって、陰関数定理より、 $\varphi(b) = a$  をみたし、 $b$  の近くで  $C^1$  級の  $\mathbf{R}^n$  に値をとる  $n$  変数関数  $\varphi$  が一意に存在し、

$$F(y, \varphi(y)) = 0, \quad \varphi'(y) = -\frac{\partial F}{\partial y}(y, \varphi(y)) \left( \frac{\partial F}{\partial x}(y, \varphi(y)) \right)^{-1}.$$

すなわち、

$$f(\varphi(y)) = y, \quad \varphi'(y) = (f'(x))^{-1}.$$

したがって、 $\varphi$  が  $f(a)$  の近くで定義された  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  である。□

**注意** 逆写像定理に現れる逆写像は一般には局所的にしか定義されない。  
例えば、 $\mathbf{R}^2$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像  $f$  を

$$f(x, y) = (x + y, xy) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める。

$f$  の逆写像を求めるにはまず連立方程式

$$u = x + y, \quad v = xy$$

を  $x, y$  について解けばよいが、これは  $t$  に関する 2 次方程式

$$t^2 - ut + v = 0 \tag{*}$$

の実数解を求めることと同値である。

判別式を考えると、(\*) が実数解をもつのは  $u^2 \geq 4v$  のときで、解は

$$(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2}, \frac{u \mp \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \right) & (\text{複号同順}) (u^2 > 4v), \\ \left( \frac{u}{2}, \frac{u}{2} \right) & (u^2 = 4v) \end{cases}$$

となり、特に  $u^2 > 4v$  のとき、(\*) は 2 つの実数解をもつ。

しかし、 $f$  の定義域を

$$\{(x, y) | x > y\}$$

または

$$\{(x, y) | x < y\}$$

に制限すれば、 $(x, y)$  は一意に定まる。

また、 $f$  の Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial x} \\ \frac{\partial(x+y)}{\partial y} & \frac{\partial(xy)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ = x - y$$

で、Jacobian が 0 となる集合は

$$\{(x, y) | x = y\}$$

である。

## 問題 3

1.  $k > 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  とし,  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  に対して

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - k^2, \quad g(x, y, z) = ax + by + cz - d,$$

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$$

とおくことにより,  $\mathbf{R}^3$  から  $\mathbf{R}^2$  への  $C^\infty$  級写像  $F$  を定める.  $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$  を

$$F(p, q, r) = 0, \quad cq - br \neq 0$$

をみたす点とする.

(1)  $\varphi(p) = (q, r)$  をみだし,  $p$  の近くで  $C^\infty$  級の  $F = 0$  の陰関数  $\varphi$  が存在することを示せ.

(2)  $\varphi'(x)$  を求めよ.

2.  $m, n$  を異なる自然数とし,  $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$  に対して

$$f(x, y, z, w) = x^m + y^m + z^m + w^m - 1, \quad g(x, y, z, w) = x^n + y^n + z^n + w^n - 1,$$

$$F(x, y, z, w) = (f(x, y, z, w), g(x, y, z, w))$$

とおくことにより,  $\mathbf{R}^4$  から  $\mathbf{R}^2$  への  $C^\infty$  級写像  $F$  を定める.  $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$  を

$$F(a, b, c, d) = 0, \quad c, d \neq 0, \quad c \neq d$$

をみたす点とする. このとき,  $\varphi(a, b) = (c, d)$  をみだし,  $(a, b)$  の近くで  $C^\infty$  級の  $F = 0$  の陰関数  $\varphi$  が存在することを示せ.

3.  $\mathbf{R}^2$  から  $\mathbf{R}^2$  への  $C^\infty$  級写像  $f$  を

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.

(1) 任意の  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  に対して,  $f(a, b)$  の近くで定義された  $C^\infty$  級の  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  が存在することを示せ.

(2)  $f^{-1}$  の Jacobi 行列を求めよ.

(3)  $f$  の像を求めよ.

(4) (3) で求めた集合で定義された  $f$  の逆写像は存在しないことを示せ.

4.  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^n$  への  $C^\infty$  級写像  $f$  を

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \dots, \sum_{i=1}^n x_i^n \right) \quad ((x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$  とし,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  は異なるとする. このとき,  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の近くで定義された  $C^\infty$  級の  $f$  の逆写像が存在することを示せ.

## 問題3の解答

1. (1) まず,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2y & b \\ 2z & c \end{vmatrix} \\ &= 2(cy - bz). \end{aligned}$$

仮定より, 上の値は  $y = q, z = r$  のとき, 0 ではない.

よって, 陰関数定理より,  $\varphi(p) = (q, r)$  をみだし,  $p$  の近くで  $C^\infty$  級の  $F = 0$  の陰関数  $\varphi$  が存在する.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -(2x, a) \begin{pmatrix} 2y & b \\ 2z & c \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -(2x, a) \cdot \frac{1}{2(cy - bz)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -2z & 2y \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{az - cx}{cy - bz}, \frac{bx - ay}{cy - bz} \right). \end{aligned}$$

2. まず,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} mz^{m-1} & nz^{n-1} \\ mw^{m-1} & nw^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= mn(z^{m-1}w^{n-1} - z^{n-1}w^{m-1}) \\ &= mnz^{n-1}w^{m-1} \left\{ \left( \frac{z}{w} \right)^{m-n} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

仮定より, 上の値は  $z = c, w = d$  のとき, 0 ではない.

よって, 陰関数定理より,  $\varphi(a, b) = (c, d)$  をみだし,  $(a, b)$  の近くで  $C^\infty$  級の  $F = 0$  の陰関数  $\varphi$  が存在する.

3. (1)  $f$  の Jacobian は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} & \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} \\ \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} & \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって、逆写像定理より、任意の  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  に対して、 $f(a, b)$  の近くで定義された  $C^\infty$  級の  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  が存在する。

(2) (1) の計算より、求める Jacobi 行列は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-x} \cos y & -e^{-x} \sin y \\ e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 原点以外のすべての点は  $f(x, y)$  と表すことができるから、 $f$  の像は  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ .

(4)  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  とすると、

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$$

よって、 $f$  は単射でないから、 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  で定義された逆写像は存在しない。

4. まず、

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

と表しておく、 $f$  の Jacobian は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2x_1 & \cdots & nx_1^{n-1} \\ 1 & 2x_2 & \cdots & nx_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2x_n & \cdots & nx_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n! \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

最後の行列式は Vandermonde の行列式だから、

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

に等しく、仮定より  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  において 0 とはならない。

よって、逆写像定理より、 $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の近くで定義された  $C^\infty$  級の  $f$  の逆写像が存在する。