§10. 曲線

§9 において, 径数付き多様体の定義について曲線を例にして考えたが, 更に曲線について考えていこう.
まず, S^1 を原点中心, 半径 1 の円とする. 問題 9 においても扱ったように, S^1 は径数付き曲線として表すことはできない. しかし, S^1 をいくつかの径数付き曲線を張り合わせたものとして表すことは可能である. 例えば, 次のように問題 9 において扱った立体射影を用いてみよう.
$N = (0, 1)$ とおき, $\mathbf{R}$ から $S^1 \setminus \{N\}$ への全単射 γ_N を

$$\gamma_N(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
このとき, γ_N は C^∞ 級径数付き曲線となり, 逆写像 γ_N^{-1} は

$$\gamma_N^{-1}(x, y) = \frac{x}{1-y} \quad \bigl((x, y) \in S^1 \setminus \{N\}\bigr)$$

によりあたえられる, N を中心とする立体射影である.
また, $S = (0, -1)$ とおき, S を中心とする立体射影を考えることもできる. 実際, $\mathbf{R}$ から $S^1 \setminus \{S\}$ への全単射 γ_S を

$$\gamma_S(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めると, γ_S は C^∞ 級径数付き曲線となり, 逆写像 γ_S^{-1} は

$$\gamma_S^{-1}(x, y) = \frac{x}{1+y} \quad \bigl((x, y) \in S^1 \setminus \{S\}\bigr)$$

によりあたえられる, S を中心とする立体射影である.
このとき,

$$S^1 = \gamma_N(\mathbf{R}) \cup \gamma_S(\mathbf{R})$$

で, S^1 は 2 つの C^∞ 級径数付き曲線 γ_N と γ_S を張り合わせたものとみなすことができる.
次に, いくつかの径数付き多様体を張り合わせたものの上で微分積分を展開するために, 何が要請されるのかを再び S^1 を例にして考えてみよう.
f を S^1 で定義された関数とする. このとき, f の微分可能性はどのように定義すればよいであろうか. まず, S^1 は $\mathbf{R}^2$ の部分集合であるから, 通常の微分積分を用いれば, f が S^1 の各点の近傍で微分可能な関数の制限となっているときに微分可能であるとすればよいであろう. しかし, 今後扱うことになる多様体は Euclid 空間の部分集合とは限らない位相空間であるため, 別の定義を考えるべきである.
そこで, γ_N, γ_S が $\mathbf{R}$ で定義された写像であることを思い出そう.
γ_N, γ_S と f の合成写像

$$f \circ \gamma_N, f \circ \gamma_S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

はもはや $\mathbf{R}$ で定義された関数であるから, S^1 が $\mathbf{R}^2$ の部分集合であることを用いることなく, 微分可能性を定義することができる. すなわち, $f \circ \gamma_N, f \circ \gamma_S$ が微分可能であるときに, f が微分可能であるとするのである.
しかし, ここで 1 つ心配な事が生じる. γ_N と γ_S は像を共有することに注意しよう. すなわち,

$$\gamma_N(\mathbf{R}) \cap \gamma_S(\mathbf{R}) = S^1 \setminus \{N, S\}$$

である．よって, ひょっとしたら $f\circ\gamma_N$ が微分可能であっても, $f\circ\gamma_S$ は微分可能ではない, あるいはその逆が起こるかもしれないのである．
このような心配事がないことを確認するには,

$$\gamma_N^{-1}\left(S^1\setminus\{N,S\}\right)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$$

で定義される関数

$$\gamma_S^{-1}\circ\gamma_N:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},$$

および

$$\gamma_S^{-1}\left(S^1\setminus\{N,S\}\right)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$$

で定義される関数

$$\gamma_N^{-1}\circ\gamma_S:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$$

が微分可能であればよい．
そこで, $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ とすると,

$$\begin{aligned}(\gamma_S^{-1}\circ\gamma_N)(t)&=\gamma_S^{-1}\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\\&=\frac{\dfrac{2t}{t^2+1}}{1+\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}\\&=\frac{1}{t}.\end{aligned}$$

よって, $\gamma_S^{-1}\circ\gamma_N$ は $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ で C^∞ 級である．
同様に,

$$(\gamma_N^{-1}\circ\gamma_S)(t)=\frac{1}{t}\quad(t\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$$

となるから, $\gamma_N^{-1}\circ\gamma_S$ も $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ で C^∞ 級である．
したがって, 上のような心配事は生じない．
特に, S^1 で定義された関数が C^r 級であるという定義をすることができる．
このように, 1 つ 1 つの張り合わせで定義された概念が全体でもちゃんと定義されているためには, その概念が張り合わせに依存しないことを示す必要がある．
§8 において扱った微分形式の積分も多様体上で定義することができる概念で, 張り合わせに依存しないことが分かる．このことを説明する事実は微分積分において現れる変数変換公式である．特に, 1 次微分形式の積分の場合は置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x(a)}^{x(b)}f(x(t))x'(t)dt$$

に他ならない．
さて, ここで平面曲線や空間曲線に対しては曲率や捩率という関数を定義することができることを指摘しておこう．
例えば,

$$\gamma:I\to\mathbf{R}^2$$

を弧長により径数付けられた平面曲線とする．

定義より, 任意の $s \in I$ に対して $\gamma'(s)$ は単位接ベクトル, すなわち

$$\|\gamma'(s)\| = 1$$

である.
$e = \gamma'$ とおき, e を各点において反時計回りに角 $\frac{\pi}{2}$ 回転して得られる $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数を n とおくと, n が単位法ベクトルである.
このとき, e, n の組, すなわち Frenet の標構 $\{e, n\}$ は Frenet の公式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e \end{cases}$$

をみたす. κ が曲率である.
また,

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を弧長により径数付けられた空間曲線とする.
定義より, 任意の $s \in I$ に対して $\gamma'(s)$ は単位接ベクトルである.
$e = \gamma'$ とおくと, 曲率 κ は

$$\kappa = \|e'\|$$

により定められ, κ が 0 とならないときは

$$e' = \kappa n$$

がなりたつように主法線ベクトル n を定めることができる.
更に, 従法線ベクトル b は $\mathbf{R}^3$ の外積を用いて

$$b = e \times n$$

により定められる.
このとき, e, n, b の組, すなわち Frenet の標構 $\{e, n, b\}$ は Frenet-Serret の公式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e + \tau b, \\ b' = -\tau n \end{cases}$$

をみたす. τ が捩率である.
ここで, 空間曲線の曲率などを考えるために, $\mathbf{R}^2$ や $\mathbf{R}^3$ の標準内積やノルムを積極的に用いていることに注意しよう. このような概念は Riemann 多様体上の Riemann 計量というものへ一般化することができる. これは一般の多様体の場合は, 単なるベクトル空間として定義される接空間に内積を導入すること, §6 において扱った言葉では, 各点において接空間上の正定値 2 次対称形式を対応させることに相当する.
また, $\mathbf{R}^n$ 内の曲線の長さという概念も内積を用いて定義されることに注意しよう. 置換積分の公式から分かるように, 長さは曲線の径数表示に依存しないため, 張り合わせに依存しない概念となる.

問題 10

1. S^1 を原点中心, 半径 1 の円とし, S^1 の部分集合 $U_1^+, U_1^-, U_2^+, U_2^-$ を

$$U_1^+ = \{(x,y) \in S^1 | x > 0\},\ U_1^- = \{(x,y) \in S^1 | x < 0\},$$

$$U_2^+ = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\},\ U_2^- = \{(x,y) \in S^1 | y < 0\}$$

により定める. また, 開区間 $(-1,1)$ から $U_1^+, U_1^-, U_2^+, U_2^-$ への全単射 $\gamma_1^+, \gamma_1^-, \gamma_2^+, \gamma_2^-$ をそれぞれ

$$\gamma_1^+(t) = (\sqrt{1-t^2}, t),\ \gamma_1^-(t) = (-\sqrt{1-t^2}, t),$$
$$\gamma_2^+(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),\ \gamma_2^-(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$$

により定める. ただし, $t \in (-1,1)$ である. このとき, $\gamma_1^+, \gamma_1^-, \gamma_2^+, \gamma_2^-$ は C^∞ 級径数付き曲線となり,

$$S^1 = \gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$$

である.
(1) $\gamma_1^+((-1,1)) \cap \gamma_2^+((-1,1))$ を求めよ.
(2) (1) の集合を V とおく. $(\gamma_1^+)^{-1}(V)$ を求めよ.
(3) $t \in (\gamma_1^+)^{-1}(V)$ とする. $((\gamma_2^+)^{-1} \circ \gamma_1^+)(t)$ を t の式で表せ.

2. $p \in \mathbf{R}^n$ とすると, 自然な同一視

$$\begin{aligned} T_p\mathbf{R}^n &= \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \middle| a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}^n \right\} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}^n\} \end{aligned}$$

と $\mathbf{R}^n$ の標準内積により, $T_p\mathbf{R}^n$ は内積空間となる. この内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表すことにする.
f を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とする. このとき, $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

により定める. $\operatorname{grad} f$ を f の勾配という.
また, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ を

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておくとき, $\mathbf{R}$ で定義された関数 $\operatorname{div} X$ を

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$$

により定める. $\operatorname{div} X$ を X の発散という.
(1) 任意の $p \in \mathbf{R}^n$ と任意の $v \in T_p\mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle (\operatorname{grad} f)_p, v \rangle = v(f)$$

がなりたつことを示せ.
(2) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ および $\operatorname{grad} \operatorname{div} X$ を計算せよ.

問題 10 の解答

1. (1) 求める集合は

$$\begin{aligned}\gamma_1^+((-1,1))\cap\gamma_2^+((-1,1)) &= U_1^+\cap U_2^+\\ &= \{(x,y)\in S^1 | x>0,\ y>0\}.\end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$(\gamma_1^+)^{-1}(V)=(0,1).$$

(3) (2) より, $t\in(0,1)$ だから,

$$\begin{aligned}((\gamma_2^+)^{-1}\circ\gamma_1^+)(t) &= (\gamma_2^+)^{-1}(\sqrt{1-t^2},t)\\ &= (\gamma_2^+)^{-1}\left(\sqrt{1-t^2},\sqrt{1-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}\right)\\ &= \sqrt{1-t^2}.\end{aligned}$$

2. (1) v を

$$v=\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と表しておく.
このとき,

$$\begin{aligned}\langle(\operatorname{grad} f)_p, v\rangle &= \left\langle\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\rangle\\ &= \left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\frac{\partial f}{\partial x_2}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right),(a_1,a_2,\ldots,a_n)\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)(f)\\ &= v(f).\end{aligned}$$

よって,

$$\langle(\operatorname{grad} f)_p, v\rangle = v(f).$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \operatorname{div}\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.\end{aligned}$$

また,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\operatorname{div} X &= \operatorname{grad} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$