§3. 多様体の例

ここでは, 基本的な多様体の例を挙げていこう.

例 (Euclid 空間)
n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.
実際, $\mathbf{R}^n$ は Hausdorff で, $1_{\mathbf{R}^n}$ を $\mathbf{R}^n$ の恒等写像とすると, $\{(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})\}$ が C^∞ 級座標近傍系となる.

径数付き多様体というものを張り合わせると, 多様体を作ることができる.
M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし, M の位相としては $\mathbf{R}^n$ の通常の位相から導かれる相対位相を考える.
問題 2 においても扱ったように, M は Hausdorff である.
ここで, 任意の $p \in M$ に対して, p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として表されているとする. すなわち, f は $\mathbf{R}^m$ の開集合 D で C^r 級の $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数で, 次の (1)〜(3) がなりたつ.

(1) 任意の $x \in D$ に対して $\operatorname{rank} f'(x) = m$.
(2) f は D から U への全単射.
(3) f^{-1} は U から D への連続写像.

このとき, (U, f^{-1}) は M の座標近傍となる.
また, (U, f^{-1}) および (V, g^{-1}) を上のような M の座標近傍で,

$$U \cap V \neq \emptyset$$

となるものとすると, 逆写像定理を用いることにより, (U, f^{-1}) から (V, g^{-1}) への座標変換

$$g^{-1} \circ f : f^{-1}(U \cap V) \to g^{-1}(U \cap V)$$

は C^r 級微分同相写像となることが分かる.
特に, 上のような座標近傍全体の集合を $\mathcal{S}$ とおくと, $\mathcal{S}$ は M の C^r 級座標近傍系を定める.
よって, $(M, \mathcal{S})$ は m 次元 C^r 級多様体となる.
径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体の中でも, 次の例は基本的である.

例 (球面)
$n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1\}$$

により定める.
S^n を原点中心, 半径 1 の n 次元球面という.
ここで, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して, S^n の開集合 U_i^+, U_i^- をそれぞれ

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,|\, x_i > 0\},\ U_i^- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,|\, x_i < 0\}$$

により定める.
また, $\mathbf{R}^n$ の開集合 D を

$$D = \{y \in \mathbf{R}^n \,|\, \|y\| < 1\}$$

により定め, D から $\mathbf{R}^{n+1}$ への写像 f_i^+, f_i^- をそれぞれ

$$f_i^+(y) = \left(y_1, \ldots, y_{i-1}, \sqrt{1-\|y\|^2}, y_i, \ldots, y_n\right),\ f_i^-(y) = \left(y_1, \ldots, y_{i-1}, -\sqrt{1-\|y\|^2}, y_i, \ldots, y_n\right)$$

により定める. ただし,

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$$

である.
このとき, f_i^+, f_i^- はそれぞれ

$$f_i^+(D) = U_i^+,\ f_i^-(D) = U_i^-$$

となる n 次元 C^∞ 級径数付き多様体で,

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^-.$$

よって, S^n は n 次元 C^∞ 級多様体である.
また, 立体射影を 2 つ用いても S^n の C^∞ 級座標近傍系を定めることができるが, これは上のようにして定まる C^∞ 級座標近傍系と同値であることが分かる.

問題 2 においても現れた n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は多様体となる.
まず, $\mathbf{R}P^n$ の位相については同値類を対応させる自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^n$$

による商位相を考えることにする. すなわち, $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U が開集合となるのは, $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合のときである. 商位相の定義より, π は連続である.
このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理　$\mathbf{R}P^n$ は Hausdorff.

$p \in \mathbf{R}P^n$ を

$$p = \pi(x) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \tag{$*$}$$

と表しておく.
ここで, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ とすると, $x_i \neq 0$ という性質は p の代表元 x の選び方に依存しない.
よって, $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U_i を

$$U_i = \{\pi(x) | x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x_i \neq 0\}$$

により定めることができる.
このとき,

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} | x_i \neq 0\}$$

は $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合だから, 商位相の定義より, U_i は $\mathbf{R}P^n$ の開集合である.
次に, U_i 上の局所座標系を定めよう.
$p \in U_i$ を $(*)$ のように表しておく.
$j = 1, 2, \ldots, n+1$ とすると, x_i と x_j の比 $\dfrac{x_j}{x_i}$ は p の代表元 x の選び方に依存しない. よって, U_i から $\mathbf{R}^n$ への写像 φ_i を

$$\varphi_i(p) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

により定めることができる.
このとき, φ_i は U_i から $\mathbf{R}^n$ への同相写像となり,

$$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

したがって, $\mathbf{R}P^n$ は $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$ を座標近傍系とする n 次元位相多様体となる.
更に, 座標変換について調べよう.
$p \in U_i \cap U_j$, $i < j$ とし,

$$\varphi_i(p) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

と表しておく.
このとき, $p \in U_j$ だから, $\xi_{j-1} \neq 0$ である.
また, (U_i, φ_i) から (U_j, φ_j) への座標変換

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

は

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_{j-1}}, \frac{1}{\xi_{j-1}}, \frac{\xi_i}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_{j-2}}{\xi_{j-1}}, \frac{\xi_j}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_{j-1}} \right)$$

によりあたえられ, これは C^∞ 級である.
以上より, $\mathbf{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.

例 (開部分多様体)
M を n 次元 C^r 級多様体, N を M の開集合とする.
このとき, N は自然に n 次元 C^r 級多様体となる.
実際, N の位相としては M の位相から導かれる相対位相を考え, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とすると, N の座標近傍系としては $\{(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}$ を考えればよい.
N を M の開部分多様体という.

例 (直積多様体)

M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする.
まず, 直積集合 $M \times N$ の直積位相を考える. すなわち, M, N の位相をそれぞれ $\mathfrak{O}_M, \mathfrak{O}_N$ とし, $M \times N$ の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{U \times V | U \in \mathfrak{O}_M,\ V \in \mathfrak{O}_N\}$$

により定める. $\mathfrak{B}$ を基底とする $M \times N$ の位相が直積位相である. このとき, $M \times N$ を M と N の直積空間という.
2 つの Hausdorff 空間の直積空間は Hausdorff となることが分かる. よって, $M \times N$ は Hausdorff である.
更に, $M \times N$ は $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体となる.
実際, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ をそれぞれ M, N の座標近傍系とすると, $M \times N$ の座標近傍系は $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ により定めればよい. ただし,

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \quad ((p, q) \in U_\alpha \times V_\beta)$$

である.
$M \times N$ を M と N の直積多様体という.

問題 3

1. $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とする. U を $\mathbf{R}^m$ の開集合, f を U で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる C^r 級関数とし,

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\}$$

とおく. M が空でなく, 任意の $x \in M$ に対して

$$\operatorname{rank} f'(x) = n$$

であると仮定する. このとき, 逆写像定理を用いることにより, M は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体となることが分かる.

このことを用いて, 次の (1)〜(4) の集合 M が C^∞ 級多様体となることを示せ.

(1) $M = \{x \in \mathbf{R}^n | \langle a, x \rangle = c\}$. ただし, $n \geq 2$ で, $a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbf{R}$. なお, M を $\mathbf{R}^n$ の超平面という.

(2) $M = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$. ただし, $n \geq 1$. すなわち, M は n 次元球面.

(3) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1\}$.
なお, M は行列式が 1 の 2 次実行列全体の集合と同一視することができる.
一般に, 行列式が 1 の n 次実行列全体の集合を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ などと表し, n 次実特殊線形群という. $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $(n^2 - 1)$ 次元 C^∞ 級多様体となることが分かる.

(4) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. なお, M を Clifford トーラスという.

2. 正則な n 次実行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ などと表し, n 次実一般線形群という. $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は n^2 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ.

3. S^1 と S^1 の直積多様体を T^2 と表し, 2 次元トーラスという. T^2 から T^2 への写像 f を

$$f((x, y), (u, v)) = ((x, -y), (-u, -v)) \quad (((x, y), (u, v)) \in T^2)$$

により定め, $p, q \in T^2$ に対して $p = q$ または $p = f(q)$ のとき, $p \sim q$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は T^2 上の同値関係となることを示せ.

なお, 商集合 $T^2/\sim$ に同値類を対応させる自然な射影による商位相を考えることにすると, $T^2/\sim$ は 2 次元 C^∞ 級多様体となる. $T^2/\sim$ を Klein の壷という.

また, $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して n_k 次元 C^r 級多様体 M_k があたえられているとき, 直積多様体 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$ が定められ, $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ 次元 C^r 級多様体となる.

特に, S^1 の n 個の直積を T^n と表し, n 次元トーラスという.

問題 3 の解答

1. (1) $\mathbf{R}^n$ で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = \langle a, x \rangle - c \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^n | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = {}^t a.$$

$a \neq 0$ だから,

$$\operatorname{rank} f'(x) = 1.$$

よって, M は $(n-1)$ 次元 C^∞ 級多様体.

(2) $\mathbf{R}^{n+1}$ で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = \|x\|^2 - 1 \quad (x \in \mathbf{R}^{n+1})$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = 2{}^t x.$$

$x \in M$ のとき, $x = 0$ となることはないから,

$$\operatorname{rank} f'(x) = 1.$$

よって, M は n 次元 C^∞ 級多様体.

(3) $\mathbf{R}^4$ で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3 - 1 \quad (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

$x \in M$ のとき,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

となることはないから,

$$\operatorname{rank} f'(x) = 1.$$

よって, M は 3 次元 C^∞ 級多様体.

(4) $\mathbf{R}^4$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとる C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1) \quad (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & 0 \\ 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

$x \in M$ のとき, $x_1 \neq 0$ または $x_2 \neq 0$ で, 更に $x_3 \neq 0$ または $x_4 \neq 0$ だから,

$$\operatorname{rank} f'(x) = 2.$$

よって, M は 2 次元 C^∞ 級多様体.

2. まず, $M_n(\mathbf{R})$ を n 次実行列全体の集合とする.
$M_n(\mathbf{R})$ は自然に n^2 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視することができるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.
ここで, 行列式を対応させる関数は $M_n(\mathbf{R})$ で定義された連続関数で,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) || X| \neq 0\}.$$

よって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開集合.
したがって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開部分多様体となるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.

3. $p, q, r \in T^2$ とする.
まず, $p = p$ だから, $p \sim p$.
次に, $p \sim q$ とすると, $p = q$ または $p = f(q)$.
$p = q$ のとき, $q \sim p$.
$p = f(q)$ のとき,

$$\begin{aligned} f(p) &= f(f(q)) \\ &= q. \end{aligned}$$

よって, $q \sim p$.
更に, $p \sim q$, $q \sim r$ とすると, $p = q$ または $p = f(q)$ で, $q = r$ または $q = f(r)$.
$p = q$, $q = r$ のとき, $p = r$ だから, $p \sim r$.
$p = q$, $q = f(r)$ のとき, $p = f(r)$ だから, $p \sim r$.
$p = f(q)$, $q = r$ のとき, $p = f(r)$ だから, $p \sim r$.
$p = f(q)$, $q = f(r)$ のとき,

$$\begin{aligned} f(q) &= f(f(r)) \\ &= r \end{aligned}$$

だから, $p = r$.
よって, $p \sim r$.
したがって, $\sim$ は T^2 上の同値関係.