§10. 微分形式

Euclid 空間上の微分形式を一般化し, 多様体上の微分形式を考えることができる.
まず, 1 次微分形式から考える.
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．ただし, $r \geq 1$ とする．$p \in M$ に対して, p における接空間 T_pM の双対空間 $(T_pM)^*$ を T_p^*M と表すことにする．T_p^*M を p における余接ベクトル空間または余接空間という.
各 $p \in M$ に対して $\omega_p \in T_p^*M$ があたえられているとする．この対応を ω と表し, M 上の 1 次微分形式という.
ω を M 上の 1 次微分形式, X を M 上のベクトル場とすると, $\omega(X)$ は M 上の関数を定める.

例 (関数の微分)
関数の微分は 1 次微分形式を定める.
M を C^r 級多様体とし, $f \in C^r(M)$ とする．このとき, §7 において扱ったように, 各 $p \in M$ に対して線形写像

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

が定まる.
ここで,

$$T_{f(p)}\mathbf{R} = \left\{ a \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)} \middle| \, a \in \mathbf{R} \right\} = \{a \in \mathbf{R}\}$$

と自然な同一視を行うと, $(df)_p \in T_p^*M$ である.
よって, df は M 上の 1 次微分形式を定める.
また, X を M 上のベクトル場とすると,

$$(df)(X) = Xf,$$

すなわち

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

が各 $p \in M$ に対してなりたつ.

$p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in S$ を $p \in U$ となるように選んでおく．φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は U 上の C^r 級関数とみなすことができるから, これらの微分を考えることができる.
一方,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

は T_pM の基底となるのであった.
このとき, Euclid 空間上の微分形式の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ は $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ の双対基底.

関数の微分を座標近傍を用いて表してみよう.

上と同じ記号を用いると,

$$\begin{aligned}(df)_p &= \sum_{i=1}^{n}(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p.\end{aligned}$$

すなわち, U 上で

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i. \tag{$*$}$$

ここで, $(V,\psi)\in\mathcal{S}$ も $p\in V$ となるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と表しておく.
$j=1,2,\dots,n$ とすると, $(*)$ より, $U\cap V$ 上で

$$dy_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}dx_i.$$

よって, 1 次微分形式の微分可能性については, 次のように定義すべきである.

定義 $(M,\mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体, ω を M 上の微分形式とし, $0\le s\le r-1$ とする. 任意の $(U,\varphi)\in S$ に対して φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておき, ω を U 上で

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

と表しておく. $f_1, f_2, \dots, f_n$ が U 上の C^s 級関数となるとき, ω は C^s 級であるという.

更に, 高次の微分形式を考えよう.
各 $p\in M$ に対して $\omega_p\in\bigwedge^k T_p^*M$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, M 上の k 次微分形式という.
ω を M 上の k 次微分形式, $X_1, X_2, \dots, X_k$ を M 上のベクトル場とすると, $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ は M 上の関数を定める.
k 次微分形式の微分可能性についても, 1 次微分形式の場合と同様に定めることができる.
以下では, C^∞ 級多様体上の C^∞ 級の微分形式を考えることにする.
M を C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級 k 次微分形式全体の集合を $D^k(M)$ と表すことにする.
Euclid 空間上の微分形式の場合と同様に, C^∞ 級微分形式に対して外積を定めることができる.
更に, 次の 2 つの定理がなりたつ.

定理 $\omega, \omega_1, \omega_2\in D^k(M)$, $\theta, \theta_1, \theta_2\in D^l(M)$, $a, b\in C^\infty(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(a\omega_1 + b\omega_2)\wedge\theta = a\omega_1\wedge\theta + b\omega_2\wedge\theta$.
(2) $\omega\wedge(a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega\wedge\theta_1 + b\omega\wedge\theta_2$.

定理 $\omega\in D^k(M)$, $\theta\in D^l(M)$, $\psi\in D^r(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl}\theta \wedge \omega$.
(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$.

M, N を C^∞ 級多様体とし, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする.
このとき, 各 $p \in M$ に対して線形写像

$$(d\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

が定まる. よって, $\omega \in D^k(N)$ とすると, 各 $p \in M$ に対して $\omega_{\varphi(p)}$ の $(d\varphi)_p$ による引き戻し $(d\varphi)_p^*\omega_{\varphi(p)}$ が定まるが, これを単に $(\varphi^*\omega)_p$ と表す. $(\varphi^*\omega)_p$ は更に写像

$$\varphi^* : D^k(N) \to D^k(M)$$

を定めるが, これも引き戻しという.
また, $D^0(N)$ は $C^\infty(N)$ とみなすことができるが, 関数の引き戻しは写像の合成により定める.
すなわち, $f \in D^0(N)$ とすると,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

である. 問題 9 も参考にするとよい.
引き戻しと外積の定義より, 次がなりたつ.

定理 $\omega \in D^k(N)$, $\theta \in D^l(N)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta).$$

更に, 多様体上の微分形式に対しても外微分を定義することができる.
$k \geq 1$ のとき, $\omega \in D^k(M)$ は座標近傍を用いると,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} f_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表すことができる. このとき,

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} df_{i_1 i_2 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とおく. $d\omega$ を ω の外微分という.
上の定義は座標近傍に依存したものである. しかし, Euclid 空間上の微分形式の場合と同様に, 多様体上の微分形式に対しても外微分は座標近傍を用いることなく表すことができることが分かる. よって, 上の $d\omega$ は $D^{k+1}(M)$ の元を定める.
また, $f \in D^0(M)$ に対しては, 関数の微分として外微分 $df \in D^1(M)$ を定める.
次の 3 つの定理も Euclid 空間の場合と同様である.

定理 $\omega \in D^k(M)$, $\theta \in D^l(M)$ とする. このとき,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$

定理 $d^2 = 0$. すなわち, 任意の $\omega \in D^k(M)$ に対して

$$d(d\omega) = 0.$$

定理 $\omega \in D^k(N)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

問題 10

1. 原点中心, 半径 1 の円 S^1 を

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

と表しておく. また, $N = (0, 1)$, $S = (0, -1)$ とおき, $\mathbf{R}$ から $S^1 \setminus \{N\}$ および $S^1 \setminus \{S\}$ への全単射 γ_N, γ_S を

$$\gamma_N(s) = \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1}\right) \ (s \in \mathbf{R}),\ \ \gamma_S(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right) \ (t \in \mathbf{R})$$

により定める. すなわち, $\gamma_N^{-1}, \gamma_S^{-1}$ はそれぞれ N, S を中心とする立体射影である. このとき, $\{(S^1 \setminus \{N\}, \gamma_N^{-1}), (S^1 \setminus \{S\}, \gamma_S^{-1})\}$ は S^1 の C^∞ 級座標近傍系となる. 更に, ι を S^1 から $\mathbf{R}^2$ への包含写像とし, $\omega \in D^1(\mathbf{R}^2)$ を

$$\omega = -ydx + xdy$$

により定める.

(1) 上の座標近傍系を用いて, $\iota^*\omega$ を表せ.

(2) S^1 から S^1 への C^∞ 級微分同相写像 φ を

$$\varphi(x, y) = (x, -y) \quad ((x, y) \in S^1)$$

により定める. $\varphi^*(\iota^*\omega) = -\iota^*\omega$ となることを示せ.

(3) $\theta \in D^1(S^1)$ が (2) の φ に対して $\varphi^*\theta = \theta$ をみたすとする. このとき, $\theta_{(\pm 1, 0)} = 0$ であることを示せ.

問題 10 の解答

1. (1) まず, 座標近傍 $(S^1 \setminus \{N\}, \gamma_N^{-1})$ を用いると,

$$\begin{aligned}\gamma_N'(s) &= \left(\frac{2(s^2+1)-2s\cdot 2s}{(s^2+1)^2}, \frac{2s(s^2+1)-(s^2-1)\cdot 2s}{(s^2+1)^2}\right)\\ &= \left(\frac{2(1-s^2)}{(s^2+1)^2}, \frac{4s}{(s^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}(\iota^*\omega)\left(\frac{d}{ds}\right) &= \omega\left((d\iota)\left(\frac{d}{ds}\right)\right)\\ &= \omega\left(\frac{d(\iota\circ\gamma_N)}{ds}\right)\\ &= \left(-\frac{s^2-1}{s^2+1}dx + \frac{2s}{s^2+1}dy\right)\left(\frac{2(1-s^2)}{(s^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{4s}{(s^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= \frac{2(s^2-1)^2}{(s^2+1)^3} + \frac{8s^2}{(s^2+1)^3}\\ &= \frac{2}{s^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\iota^*\omega = \frac{2}{s^2+1}ds.$$

次に, 座標近傍 $(S^1 \setminus \{S\}, \gamma_S^{-1})$ を用いると,

$$\begin{aligned}\gamma_S'(t) &= \left(\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}, \frac{-2t(t^2+1)-(1-t^2)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\right)\\ &= \left(\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}, -\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}(\iota^*\omega)\left(\frac{d}{dt}\right) &= \omega\left((d\iota)\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\\ &= \omega\left(\frac{d(\iota\circ\gamma_S)}{dt}\right)\\ &= \left(-\frac{1-t^2}{t^2+1}dx + \frac{2t}{t^2+1}dy\right)\left(\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{4t}{(t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= -\frac{2(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} - \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}\\ &= -\frac{2}{t^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\iota^*\omega = -\frac{2}{t^2+1}dt.$$

(2) まず, φ の定義域を座標近傍 $(S^1 \setminus \{N\}, \gamma_N^{-1})$ に制限して考える.
このとき, φ の値域の座標近傍として $(S^1 \setminus \{S\}, \gamma_S^{-1})$ を選ぶことができる.

$s \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(\gamma_S^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_N)(s) = s$$

だから,

$$\begin{aligned}(\varphi^*(\iota^*\omega))\left(\frac{d}{ds}\right) &= (\iota^*\omega)\left((d\varphi)\left(\frac{d}{ds}\right)\right) \\ &= (\iota^*\omega)\left(\frac{d(\gamma_S^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_N)}{ds}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{s^2+1}dt\right)\left(\frac{d}{dt}\right) \\ &= -\frac{2}{s^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\varphi^*(\iota^*\omega) &= -\frac{2}{s^2+1}ds \\ &= -\iota^*\omega.\end{aligned}$$

同様に, φ の定義域を座標近傍 $(S^1 \setminus \{S\}, \gamma_S^{-1})$ に制限して考えると,

$$\begin{aligned}\varphi^*(\iota^*\omega) &= \frac{2}{t^2+1}dt \\ &= -\iota^*\omega.\end{aligned}$$

したがって,

$$\varphi^*(\iota^*\omega) = -\iota^*\omega.$$

(3) (1) より, $\iota^*\omega$ は S^1 の各点において 0 とはならない.
よって, ある $f \in C^\infty(S^1)$ が存在し,

$$\theta = f\iota^*\omega.$$

仮定と (2) より,

$$\begin{aligned}(f\iota^*\omega)_p &= \theta_p \\ &= (\varphi^*\theta)_p \\ &= (\varphi^*(f\iota^*\omega))_p \\ &= (\varphi^*f)_p\varphi^*(\iota^*\omega)_p \\ &= (f \circ \varphi)(p)(-(\iota^*\omega)_p) \\ &= -f(\varphi(p))(\iota^*\omega)_p.\end{aligned}$$

ここで, $p = (\pm 1, 0)$ とすると, $\varphi(p) = p$ だから,

$$(f\iota^*\omega)_p = 0.$$