§3. 全体集合

実際に集合を用いて数学を記述する場合は基礎となる集合を１つ固定しておき, その他の集合はその部分集合として表される場合が多い. このとき, 基礎となる集合を普遍集合または全体集合という.

例　１変数の微分積分では関数は $\mathbf{R}$ の部分集合で定義される. このとき, $\mathbf{R}$ は全体集合で, $\mathbf{R}$ の部分集合としては区間, 特に開区間や閉区間を考えることが多い.

線形代数では行列の計算のみを行うのであれば, 特に集合や写像の概念を強調する必要はないが, 先に進むに従ってこれらの言葉は必要不可欠となる. ここでは, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間のみを考えることにする.

定義　V を集合とし, $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする. V に和という演算

$$u + v \in V$$

およびスカラー倍という演算

$$au \in V$$

が定められ, 次の (1)〜(8) がなりたつとき, V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間という.

(1) $u + v = v + u$ (交換律).

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合律).

(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の u に対して $u + 0 = 0 + u = u$ がなりたつ.

(4) $a(bu) = (ab)u$ (結合律).

(5) $(a + b)u = au + bu$ (分配律).

(6) $a(u + v) = au + av$ (分配律).

(7) $1u = u$.

(8) $0u = 0$.

ベクトル空間の元に対する演算においては, 通常の数の場合と同様の表し方が用いられる. 例えば, ベクトル空間の元 u, v に対して $u + (-1)v$ を $u - v$ と表す.
線形代数では１つのベクトル空間を全体集合として固定しておき, その部分集合としては部分空間というものを考えることが多い.

定義　W をベクトル空間 V の部分集合とする. W は V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となるとき, V の部分空間という.

X を全体集合, A を X の部分集合とする. $X \setminus A$ を A^c と表し, A の補集合という. 定義より,

$$A^c = \{x \in X | x \notin A\}$$

と表されるが, X を全体集合としているので, 単に

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

と表してもよい.
次は明らかであろう.

命題　X を全体集合, A を X の部分集合とすると, 次の (1)〜(5) がなりたつ.

(1) $A \cup A^c = X$.
(2) $A \cap A^c = \emptyset$.
(3) $(A^c)^c = A$.
(4) $X^c = \emptyset$.
(5) $\emptyset^c = X$.

例　X を全体集合, A, B を X の部分集合とすると,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= \{A \cap (A \cup B^c)\} \cup \{B \cap (A \cup B^c)\} \quad (\text{分配律}) \\
&= \{(A \cup B^c) \cap A\} \cup \{(A \cup B^c) \cap B\} \quad (\text{交換律}) \\
&= (A \cap A) \cup (B^c \cap A) \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap B) \quad (\text{分配律}) \\
&= A \cup (B^c \cap A) \cup (B \cap A) \cup \emptyset \quad (\text{交換律と上の命題の}\ (2)) \\
&= A \cup \{(B^c \cup B) \cap A\} \quad (\text{分配律}) \\
&= A \cup (X \cap A) \quad (\text{交換律と上の命題の}\ (1)) \\
&= A \cup A \\
&= A.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) &= A \cap (A^c \cup B) \\
&= (A^c \cup B) \cap A \quad (\text{交換律}) \\
&= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \quad (\text{分配律}) \\
&= \emptyset \cup (A \cap B) \quad (\text{交換律と上の命題の}\ (2)) \\
&= A \cap B.
\end{aligned}$$

命題「P ならば Q」に対して命題「Q でないならば P でない」を元の命題の対偶という. 元の命題が真ならば, その対偶も真である. この事実は数学的な命題を証明する際に用いると便利な場合がある.

命題　X を全体集合, A, B を X の部分集合とする. $A \subset B$ であることと $A^c \supset B^c$ であることとは同値.

証明　$A \subset B$ であるとは $x \in A$ ならば $x \in B$ となることである.
この対偶を取ると, $x \notin B$ ならば $x \notin A$.
すなわち, $x \in B^c$ ならば $x \in A^c$ だから, $B^c \subset A^c$.
よって, 命題が証明された. □

更に, 補集合に関して次がなりたつ.

de Morgan の法則　X を全体集合, A, B を X の部分集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

証明　(1): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= \{x | x \notin A \cup B\} \\
&= \{x | x \notin A\ \text{かつ}\ x \notin B\} \\
&= \{x | x \in A^c\ \text{かつ}\ x \in B^c\} \\
&= A^c \cap B^c.
\end{aligned}$$

(2): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{x | x \notin A \cap B\} \\ &= \{x | x \notin A \text{ または } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A^c \text{ または } x \in B^c\} \\ &= A^c \cup B^c.\end{aligned}$$

□

命題　X を全体集合, A, B を X の部分集合とすると,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c.$$

証明　まず,

$$A \subset A \cup B$$

だから,

$$A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B.$$

逆に, $x \in (A \cup B) \setminus B$ とすると, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$.
よって, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A \setminus B$.
したがって,

$$(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B.$$

以上より,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

次に,

$$A \cap B \subset B$$

だから,

$$A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B).$$

逆に, $x \in A \setminus (A \cap B)$ とすると, $x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$.
よって, $x \in A$ かつ $x \in (A \cap B)^c$.
de Morgan の法則より, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ だから, $x \in A$ かつ $x \in B^c$. すなわち, $x \in A \setminus B$.
したがって,

$$A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B.$$

以上より,

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

更に,

$$\begin{aligned}A \setminus B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c.\end{aligned}$$

□

問題 3

1. X を全体集合, A, B, C を X の部分集合とする. 問題 2 においても現れた対称差に関して次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.
(1) $A \ominus X = A^c$.
(2) $A \ominus A^c = X$.
(3) $A \ominus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
(4) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$. すなわち, 対称差は結合律をみたす.

2. A, B を集合とすると, $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y が一意的に存在することを示せ.

3. A_1, A_2, B_1, B_2 を集合とする. $A_1 \ominus A_2 = B_1 \ominus B_2$ ならば, $A_1 \ominus B_1 = A_2 \ominus B_2$ であることを示せ.

問題 3 の解答

1. (1) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned} A \ominus X &= (A \setminus X) \cup (X \setminus A) \\ &= \emptyset \cup A^c \\ &= A^c. \end{aligned}$$

(2) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned} A \ominus A^c &= (A \setminus A^c) \cup (A^c \setminus A) \\ &= \{A \cap (A^c)^c\} \cup (A^c \cap A^c) \\ &= (A \cap A) \cup A^c \\ &= A \cup A^c \\ &= X. \end{aligned}$$

(3) 右辺を変形すると,

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \quad (\text{de Morgan の法則}) \\ &= \{A \cap (A^c \cup B^c)\} \cup \{B \cap (A^c \cup B^c)\} \quad (\text{分配律}) \\ &= \{(A^c \cup B^c) \cap A\} \cup \{(A^c \cup B^c) \cap B\} \quad (\text{交換律}) \\ &= (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap B) \quad (\text{分配律}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup \emptyset \quad (\text{交換律}) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= A \ominus B. \end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$\begin{aligned} (A \ominus B)^c &= \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\}^c \\ &= \{(A \cup B) \cap (A \cap B)^c\}^c \\ &= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \quad (\text{de Morgan の法則}) \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) \quad (\text{de Morgan の法則}). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} (A \ominus B) \ominus C &= \{(A \ominus B) \setminus C\} \cup \{C \setminus (A \ominus B)\} \\ &= [\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap C^c] \cup \{C \cap (A \ominus B)^c\} \\ &= [\{(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\} \cap C^c] \cup [\{(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap C] \\ &\quad (\text{交換律}) \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\ &\quad (\text{分配律}) \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\ &\quad (\text{交換律}). \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} A \ominus (B \ominus C) &= (B \ominus C) \ominus A \quad (\text{対称差に関する交換律}) \\ &= (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C \cap A^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A) \cup (B \cap C \cap A). \end{aligned}$$

和集合と共通部分に関する交換律より,

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C).$$

2. $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y が存在すると仮定する.
A と上の式の両辺の対称差を取ると, 対称差に関する結合律より,

$$\begin{aligned} A \ominus B &= A \ominus (A \ominus Y) \\ &= (A \ominus A) \ominus Y \\ &= \emptyset \ominus Y \quad (A \ominus A = \emptyset) \\ &= Y \ominus \emptyset \quad (\text{対称差に関する交換律}) \\ &= Y \quad (Y \ominus \emptyset = Y). \end{aligned}$$

逆に, $Y = A \ominus B$ とおくと,

$$\begin{aligned} A \ominus Y &= A \ominus (A \ominus B) \\ &= (A \ominus A) \ominus B \\ &= \emptyset \ominus B \\ &= B. \end{aligned}$$

よって, $A \ominus Y = B$ をみたす集合 Y は一意的に存在し, $Y = A \ominus B$.

3. 仮定より,

$$\{A_1 \ominus (A_1 \ominus A_2)\} \ominus B_2 = \{A_1 \ominus (B_1 \ominus B_2)\} \ominus B_2. \tag{$*$}$$

$(*)$ の左辺を変形すると, 対称差に関する結合律より,

$$\begin{aligned} \{A_1 \ominus (A_1 \ominus A_2)\} \ominus B_2 &= (A_1 \ominus A_1) \ominus (A_2 \ominus B_2) \\ &= \emptyset \ominus (A_2 \ominus B_2) \\ &= A_2 \ominus B_2. \end{aligned}$$

$(*)$ の右辺を変形すると, 対称差に関する結合律より,

$$\begin{aligned} \{A_1 \ominus (B_1 \ominus B_2)\} \ominus B_2 &= (A_1 \ominus B_1) \ominus (B_2 \ominus B_2) \\ &= (A_1 \ominus B_1) \ominus \emptyset \\ &= A_1 \ominus B_1. \end{aligned}$$

よって,

$$A_1 \ominus B_1 = A_2 \ominus B_2.$$