§6. 集合系と集合族

位相空間論や測度論においても見られるように, 数学では集合の集まりからなる集合を考えることも多い. このような集合の集合を集合系という.

例 (部分集合系)
A を集合とする. 任意の元が A の部分集合となるような集合系を A の部分集合系という. 例えば, §1 の最後に現れた A の巾集合 2^A は A の部分集合系である.

$\mathfrak{A}$ を集合系とする. なお, $\mathfrak{A}$ が集合系である雰囲気を表すために, 通常使われる $A, B, C, \ldots$ とは異なる文字を用いることにする. このとき, 集合 $\bigcup \mathfrak{A}$ および $\bigcap \mathfrak{A}$ を

$$\bigcup \mathfrak{A} = \{x | x \in A \text{ となる } A \in \mathfrak{A} \text{ が存在する }\},$$
$$\bigcap \mathfrak{A} = \{x | \text{ 任意の } A \in \mathfrak{A} \text{ に対して } x \in A\}$$

により定め, それぞれ $\mathfrak{A}$ の和集合, 共通部分という. これらは $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$, $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ などとも表す.

Λ を集合とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に $A_\lambda \in \mathfrak{A}$ が対応するような Λ から $\mathfrak{A}$ への写像を $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と表し, Λ によって添字付けられた集合族という. このとき, Λ を添字集合, Λ の元を添字という.

注意　集合族を考える際は値域 $\mathfrak{A}$ はあまり重要ではない.
数学では「族」という言葉は添字付けられたものを考えているという意味を含むことが多いが, 集合系と集合族を厳密に区別しない場合もある.

例　集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ は添字集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ によって添字付けられた集合族.

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ および $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | x \in A_\lambda \text{ となる } \lambda \in \Lambda \text{ が存在する }\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | \text{ 任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\}$$

により定め, それぞれ $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合, 共通部分という.
この定義は Λ が有限集合のときは, §2 において定義した集合の和集合, 共通部分と一致する. 例えば, $\Lambda = \{1, 2\}$ のとき,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A_1 \cup A_2, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A_1 \cap A_2$$

である.
また, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ のときはそれぞれ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\Lambda = \mathbf{N}$ のときはそれぞれ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ などとも表す.
§2 において扱った分配律は次のように一般化することができる.

定理　$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族, B を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B)$.

(2) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup B)$.

更に, 次がなりたつ.

定理　$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (B_\mu)_{\mu\in M}$ を集合族とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$.

(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$.

(3) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \times \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \times B_\mu)$.

(4) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \times \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \times B_\mu)$.

A を集合, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して A_λ が A の部分集合となるような集合族とする. このとき, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の部分集合族という.
§2 において扱った de Morgan の法則は次のように一般化することができる.

de Morgan の法則　X を全体集合, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

更に, §4 の最後に述べた定理の幾つかは次のように一般化することができる.

定理　X, Y を集合, f を X から Y への写像, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (B_\mu)_{\mu\in M}$ をそれぞれ X, Y の部分集合族とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$.

(2) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$.

(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)$.

(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)$.

(2) において, f が単射ならば, 等号がなりたつ.
$(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{N}$ によって添字付けられた集合族とし, 集合 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ を

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

により定め, $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の上極限集合という. すなわち, $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ は無限個の A_n に含まれる元全体の集合である. $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ は $\limsup_{n\to\infty} A_n$ とも表す.

また, 集合 $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ を

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

により定め, $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の下極限集合という. すなわち, $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ は有限個の A_n を除いてそれ以外のすべての A_n に含まれる元全体の集合である. $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ は $\liminf_{n\to\infty} A_n$ とも表す.
上極限集合, 下極限集合は例えば確率論において Borel-Cantelli の補題を述べる際に現れる.
定義より,

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

がなりたち, 次の例からも分かるように等号は一般にはなりたたない. 上の式において, 等号がなりたつときは, これらの集合を $\lim_{n\to\infty} A_n$ と表し, $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の極限集合という. また, $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は $\lim_{n\to\infty} A_n$ に収束するという.

例 A, B を集合とし, 集合族 $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$A_{2n} = A,\ A_{2n-1} = B\ (n \in \mathbf{N})$$

により定めると,

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty}(A\cup B) \\ &= A\cup B.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap B) \\ &= A\cap B.\end{aligned}$$

上極限集合, 下極限集合に関して次は基本的である.

定理 $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}, (B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{N}$ によって添字付けられた集合族とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n \subset B_n$ ならば,

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} B_n,\ \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} B_n.$$

(2) $\varlimsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} B_n$.
(3) $\varliminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \varliminf_{n\to\infty} A_n \cap \varliminf_{n\to\infty} B_n$.

問題 6

1. $\mathbf{R}$ の部分集合族 $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を次の (1)〜(3) のように定める. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ および $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ.

(1) $I_n = \left[-2+\dfrac{1}{n}, 2-\dfrac{1}{n}\right]$.

(2) $I_n = \left(a, b+\dfrac{1}{n}\right)$. ただし, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

(3) $I_n = [-n, n]$.

2. $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{N}$ によって添字付けられた集合族とする.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n \subset A_{n+1}$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

であることを示せ.

(2) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n \supset A_{n+1}$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

であることを示せ.

3. $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}, (B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{N}$ によって添字付けられた集合族とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n, \lim_{n\to\infty} B_n$ がともに存在するならば,

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$$

がなりたつことを示せ.

問題 6 の解答

1. (1) まず,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (-2, 2).$$

また,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [-1, 1].$$

(2) まず,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a, b+1).$$

また,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = (a, b].$$

(3) まず,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbf{R}.$$

また,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [-1, 1].$$

2. (1) まず,

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

また, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n \subset A_{n+1}$ だから,

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.\end{aligned}$$

よって,

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

一方,

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

は常になりたつ.
したがって,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(2) まず, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n \supset A_{n+1}$ だから,

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \\ &\supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

よって,

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

一方,

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

は常になりたつ.
したがって,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. まず,

$$\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \cup \varlimsup_{n\to\infty} B_n$$

は常になりたつ.
また, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$A_n, B_n \subset A_n \cup B_n$$

だから,

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} A_n \cup \varliminf_{n\to\infty} B_n &\subset \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) \cup \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) \\ &= \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n).\end{aligned}$$

よって, 仮定より,

$$\varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n \subset \varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n).$$

一方,

$$\varliminf_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) \subset \varlimsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n).$$

は常になりたつ.
したがって,

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n.$$