§7. 濃度

2つの集合を比較する上で基本的な概念が濃度である．濃度自身についてはあまり深入りしたくないので, ここでは2つの集合の濃度が等しいという概念について扱う．
A, B を集合とする．A から B への全単射が存在するとき, A と B は濃度が等しいという．このとき, $A \sim B$ と表すことにする．$A \sim B$ でないときは $A \not\sim B$ と表す．

定理　A, B, C を集合とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $A \sim A$.
(2) $A \sim B$ ならば, $B \sim A$.
(3) $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば, $A \sim C$.

証明　(1): A の上の恒等写像 1_A は A から A への全単射であるから, $A \sim A$.
(2): f を A から B への全単射とすると, f の逆写像 f^{-1} は B から A への全単射である．
よって, $A \sim B$ ならば, $B \sim A$.
(3): f を A から B への全単射, g を B から C への全単射とすると, f と g の合成写像 $g \circ f$ は A から C への全単射である．
よって, $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば, $A \sim C$. □

例　A を n 個の元からなる有限集合, B を集合とする．A と B の濃度が等しいための必要十分条件は B が n 個の元からなる有限集合であることはほとんど明らかであろう．

$\mathbf{N}$ と濃度が等しい集合を可算集合という．上の定理の (3) より, 可算集合と濃度が等しい集合は可算集合である．また, 有限集合と可算集合を合わせて高々可算集合という．
基本的な可算集合の例を幾つか挙げよう．

例　$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ への写像 f を

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める．ただし, [　] は Gauss 記号．すなわち, $x \in \mathbf{R}$ に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数．
このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$.
よって, $\mathbf{Z}$ は可算集合．
また, A を偶数全体の集合とし, $\mathbf{Z}$ から A への写像 g を

$$g(m) = 2m \quad (m \in \mathbf{Z})$$

により定める．
このとき, g は全単射となるから, $\mathbf{Z} \sim A$.
$\mathbf{Z}$ は可算集合だから, A も可算集合．
更に, B を奇数全体の集合とし, A から B への写像 h を

$$h(l) = l + 1 \quad (l \in A)$$

により定める．
このとき, h は全単射となるから, $A \sim B$.
A は可算集合だから, B も可算集合．

例 (Cantor の対関数)
$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像 f を

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n \quad ((m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N})$$

により定める. f を Cantor の対関数という.
このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$.
よって, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ は可算集合.
更に, 次の定理より, 2 つの可算集合の直積は可算集合.

定理 A, B, A', B' を集合とする. $A\sim A'$ かつ $B\sim B'$ ならば, $A\times B\sim A'\times B'$.

例 A を $\mathbf{N}$ の無限部分集合とする.
$a\in A$ とすると, a 以下の A の元の個数は有限.
この個数を $f(a)$ とおくと, $f(a)$ は A から $\mathbf{N}$ への全単射を定めるから, $A\sim\mathbf{N}$.
よって, A は可算集合.
更に, 可算集合の無限部分集合は可算集合.

例 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ はともに可算集合だから, $\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ は可算集合.
まず, $\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ の部分集合 A を

$$A=\{(1,0),(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{Z}|n\neq 0\text{ で }m\text{ と }n\text{ は互いに素}\}$$

により定める.
A は可算集合 $\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ の無限部分集合だから, 可算集合.
ここで, A から $\mathbf{Q}$ への写像 f を

$$f(m,n)=\frac{n}{m}\quad((m,n)\in A)$$

により定める.
このとき, f は全単射となるから, $A\sim\mathbf{Q}$.
よって, $\mathbf{Q}$ は可算集合.

$\mathbf{R}$ が可算集合でないことを次に述べる Cantor の対角線論法により示すことができる.

例 (Cantor の対角線論法)
$\mathbf{R}$ が可算集合でないことを背理法により示す.
$\mathbf{R}$ が可算集合であると仮定する.
このとき, 区間 $(0,1]$ は $\mathbf{R}$ の無限部分集合だから, 可算集合.
よって, $\mathbf{N}$ から $(0,1]$ への全単射 f が存在する.
各 $n\in\mathbf{N}$ に対して $f(n)$ を 10 進法を用いて,

$$\begin{aligned}f(1)&=0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots,\\ f(2)&=0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots,\\ f(3)&=0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots,\\ &\vdots\end{aligned}$$

と無限小数に展開しておく. ただし, $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$ は 0 から 9 までの整数である.
例えば,

$$1=0.999\ldots,\ 0.2=0.1999\ldots$$

である.
ここで,

$$b_n=\begin{cases}1 & (a_{nn}\text{ は偶数}),\\ 2 & (a_{nn}\text{ は奇数}),\end{cases}\quad b=0.b_1b_2b_3\ldots$$

とおくと, $b \in (0,1]$.
f は全射だから, $b = f(n)$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する.
一方, b と $f(n)$ の小数第 n 位は異なるから, $b \neq f(n)$.
これは矛盾.
したがって, $\mathbf{R}$ は可算集合でない.

例　§5 において示したように, $\mathbf{R}$ から区間 $(0,1]$ への全単射が存在するから, $\mathbf{R} \sim (0,1]$.
更に, 任意の区間から任意の区間への全単射が存在することが分かるから, 任意の区間は互いに濃度が等しい.

次の Cantor の定理より, 任意の集合はその巾集合と濃度が等しくないことが分かる.

Cantor の定理　A を集合とすると, 2^A から A への単射は存在しない.
また, A から 2^A への全射は存在しない.

証明　まず, 2^A から A への単射 f が存在すると仮定する.
A の部分集合 X を

$$X = \{f(B) | B \in 2^A,\ f(B) \notin B\}$$

により定める.
$f(X) \notin X$ のとき, X の定義より, $f(X) \in X$.
これは矛盾.
$f(X) \in X$ のとき, X の定義より,

$$f(X) = f(B),\ f(B) \notin B$$

となる $B \in 2^A$ が存在する.
仮定より, f は単射だから, $X = B$.
よって, $f(X) \notin X$.
これは矛盾.
よって, 2^A から A への単射は存在しない.
次に, A から 2^A への全射 g が存在すると仮定する.
A の部分集合 Y を

$$Y = \{a \in A | a \notin g(a)\}$$

により定める.
仮定より, g は全射だから, $g(a) = Y$ となる $a \in A$ が存在する.
$a \notin Y$ のとき, Y の定義および $g(a) = Y$ より,

$$a \in g(a) = Y.$$

これは矛盾.
$a \in Y$ のとき, Y の定義および $g(a) = Y$ より,

$$a \notin g(a) = Y.$$

これは矛盾.
よって, A から 2^A への全射は存在しない. □

問題 7

1. $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ は濃度が等しいことを示せ.

2. A を集合, B を A の部分集合とすると, A から集合 $\{0, 1\}$ への写像, すなわち A で定義され 0 または 1 に値をとる関数 χ_B を

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & (a \in B), \\ 0 & (a \in A \setminus B) \end{cases}$$

により定めることができる. なお, χ_B を B の特性関数または定義関数という.
A から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を $F(A, \{0, 1\})$ と表すことにする. 定義関数を用いることにより, 2^A と $F(A, \{0, 1\})$ は濃度が等しいことを示せ.

3. X を全体集合, A, B を X の部分集合とする. 定義関数に関して次の (1), (2) がなりたつことを示せ.
(1) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.
(2) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

4. 整数を係数とする x の方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の解となる複素数を代数的数という. 代数的数全体の集合は可算集合であることを示せ.

問題 7 の解答

1. $\mathbf{R}$ から $\mathbf{Z} \times [0, 1)$ への写像 f を

$$f(x) = ([x], x - [x]) \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める.
このとき, f は全単射となるから, $\mathbf{Z} \times [0, 1) \sim \mathbf{R}$.
$\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$, $\mathbf{R} \sim (0, 1]$ だから, $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$.

2. 2^A から $F(A, \{0, 1\})$ への写像 Φ を

$$\Phi(B) = \chi_B \quad (B \in 2^A)$$

により定める.
まず,

$$B, B' \in 2^A, \ B \neq B'$$

とすると, $B \setminus B' \neq \emptyset$ または $B' \setminus B \neq \emptyset$.
一般性を失うことなく, $B \setminus B' \neq \emptyset$ としてよい.
このとき, $a \in B \setminus B'$ とすると,

$$\chi_B(a) = 1, \ \chi_{B'}(a) = 0$$

だから, $\chi_B \neq \chi_{B'}$.
すなわち,

$$\Phi(B) \neq \Phi(B').$$

よって, Φ は単射.
次に, $f \in F(A, \{0, 1\})$ とする.
$B \in 2^A$ を

$$B = f^{-1}(\{1\})$$

により定めると,

$$\begin{aligned} \Phi(B) &= \chi_B \\ &= f. \end{aligned}$$

よって, Φ は全射.
したがって, Φ は全単射だから, $2^A \sim F(A, \{0, 1\})$.

3. (1) まず, $x \in A \cup B$ とすると,

$$\chi_{A \cup B}(x) = 1.$$

また, このとき, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in A \cap B$ の何れか 1 つのみがなりたつ.
$x \in A \setminus B$ のとき,

$$\begin{aligned} (\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B})(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \\ &= 1 + 0 + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$x \in B \setminus A$ のとき, 上と同様に,

$$(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = 1.$$

$x \in A \cap B$ のとき,

$$\begin{aligned}(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)\\ &= 1 + 1 - 1\\ &= 1.\end{aligned}$$

次に, $x \in (A \cup B)^c$ とすると,

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x) = 0$$

だから,

$$\chi_{A\cup B}(x) = (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B})(x) = 0.$$

よって,

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

(2) まず, $x \in A \cap B$ とすると,

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$$

だから,

$$(\chi_A\chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) = 1.$$

次に, $x \in (A \cap B)^c$ とすると,

$$\chi_{A\cap B}(x) = 0.$$

de Morgan の法則より,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

だから, $\chi_A(x) = 0$ または $\chi_B(x) = 0$.
よって,

$$(\chi_A\chi_B)(x) = 0.$$

したがって,

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B.$$

4. A を整数を係数とする x の 1 次以上の多項式全体の集合, B を 2 以上の自然数全体の集合とし, A から B への写像 Φ を

$$\Phi(f) = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

$$(f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in A)$$

により定める.
このとき, 任意の $m \in B$ に対して $\Phi^{-1}(\{m\})$ は空でない有限集合.
よって, $\Phi^{-1}(\{m\})$ のある元 f に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となる代数的数全体の集合は空でない有限集合.
したがって, 代数的数全体の集合は可算集合.