§10. 整列集合

$\mathbf{N}$ の大小関係を考えよう．このとき, $\mathbf{N}$ の重要な性質として, 任意の空でない部分集合は最小元をもつことが挙げられる．証明は数学的帰納法を用いればよい．このような性質をもつ順序集合を考えよう．

$(W, \leq)$ を順序集合とする．$(W, \leq)$ は任意の空でない部分集合が最小元をもつとき, 整列集合という．

2 つの元からなる部分集合を考えると, 整列集合は全順序集合であることが分かる．

また, 有限全順序集合は整列集合である．

最初に述べたように, $\mathbf{N}$ は大小関係に関して整列集合であるが, $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ は大小関係に関して整列集合ではない．

$(W, \leq)$ を整列集合とする．$a \in W$ に対して W の部分集合 $W\langle a \rangle$ を

$$W\langle a \rangle = \{x \in W | x < a\}$$

により定め, $W\langle a \rangle$ を W の a による切片という．例えば, $a = \min W$ のときは $W\langle a \rangle = \emptyset$ である．

自然数に関する数学的帰納法は次の超限帰納法の特別な場合である．

超限帰納法　$(W, \leq)$ を整列集合とする．各 $a \in W$ に対して命題 $P(a)$ があたえられ, 次の (1), (2) がなりたつと仮定する．

(1) $P(\min W)$ は真．

(2) $\min W$ と異なる任意の $a \in W$ と任意の $b \in W\langle a \rangle$ に対して $P(b)$ が真ならば, $P(a)$ は真．

このとき, 任意の $a \in W$ に対して $P(a)$ は真．

証明　W の部分集合 A を

$$A = \{a \in W | P(a) \text{ は真ではない }\}$$

により定め, $A \neq \emptyset$ と仮定する．

$(W, \leq)$ は整列集合だから, $\min A$ が存在する．

(1) より, $\min A \neq \min W$.

A の定義より, 任意の $b \in W\langle \min A \rangle$ に対して $P(b)$ は真．

よって, (2) より, $P(\min A)$ は真．

これは矛盾．

したがって, $A = \emptyset$. すなわち, 任意の $a \in W$ に対して $P(a)$ は真．　□

整列集合の比較定理を最後に示すために, 準備として補題を 3 つ用意しよう．

補題　$(W, \leq)$ を整列集合, f を W から W 自身への順序を保つ単射とすると, 任意の $x \in W$ に対して $x \leq f(x)$.

証明　W の部分集合 A を

$$A = \{x \in W | f(x) < x\}$$

により定め, $A \neq \emptyset$ と仮定する．

$(W, \leq)$ は整列集合だから, $\min A$ が存在する．

A の定義より, $f(\min A) < \min A$.

f は順序を保つ単射だから,

$$f(f(\min A)) < f(\min A).$$

よって, $f(\min A) \in A$.
$f(\min A) < \min A$ だから, これは矛盾.
したがって, $A = \emptyset$. すなわち, 任意の $x \in W$ に対して $x \leq f(x)$. $\square$

$(A, \leq)$ を順序集合, M を A の空でない部分集合とすると, 自然に順序集合 $(M, \leq)$ を考えることができる. $(M, \leq)$ を $(A, \leq)$ の部分順序集合という.

補題　$(W, \leq)$ を整列集合とし, $a, b \in W$ とする. $a \neq b$ ならば, $(W\langle a\rangle, \leq)$ と $(W\langle b\rangle, \leq)$ は順序同型ではない.

証明　$a < b$ としてよい.
$W\langle b\rangle$ から $W\langle a\rangle$ への順序同型写像 f が存在すると仮定する.
このとき,

$$W\langle b\rangle \simeq W\langle a\rangle \subset W\langle b\rangle.$$

よって, ι を $W\langle a\rangle$ から $W\langle b\rangle$ への包含写像とすると, 合成写像 $i \circ f$ は $W\langle b\rangle$ から $W\langle b\rangle$ 自身への順序を保つ単射で, $(i \circ f)(a) < a$.
上の補題より, これは矛盾.
したがって, $(W\langle a\rangle, \leq)$ と $(W\langle b\rangle, \leq)$ は順序同型ではない. $\square$

補題　$(W, \leq), (W', \leq')$ を整列集合とし, W の部分集合 W_1 を

$$W_1 = \{a \in W | W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle \text{ となる } a' \in W' \text{ が存在する }\}$$

により定める. このとき, $W_1 = W$ または $W_1 = W\langle a_1\rangle$ となる $a_1 \in W$ が一意的に存在する.

証明　$W_1 \neq W$ とする.
$(W, \leq)$ は整列集合で $W \setminus W_1 \neq \emptyset$ だから, $\min(W \setminus W_1)$ が存在する.
$\min(W \setminus W_1)$ の定義より,

$$W\langle \min(W \setminus W_1)\rangle \subset W_1.$$

ここで, $\min(W \setminus W_1) < a$ となる $a \in W_1$ が存在すると仮定する.
W_1 の定義より, ある $a' \in W'$ と $W\langle a\rangle$ から $W'\langle a'\rangle$ への順序同型写像 f が存在する.
このとき, f は $W\langle \min(W \setminus W_1)\rangle$ から $W'\langle f(\min(W \setminus W_1))\rangle$ への順序同型写像を定める.
よって,

$$\min(W \setminus W_1) \in W_1.$$

これは矛盾.
したがって,

$$W_1 \subset W\langle \min(W \setminus W_1)\rangle.$$

以上より,

$$W_1 = W\langle \min(W \setminus W_1)\rangle$$

だから, $a_1 = \min(W \setminus W_1)$ とおけばよい.
また, 上の補題より, a_1 は一意的. $\square$

最後に, 整列集合の比較定理を述べよう.

整列集合の比較定理　$(W, \leq), (W', \leq')$ を整列集合とすると, 次の (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつ.

(1) $W \simeq W'$.
(2) $W \simeq W'\langle a'\rangle$ となる $a' \in W'$ が存在する.
(3) $W\langle a\rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在する.

証明　W の部分集合 W_1 および W' の部分集合 W'_1 をそれぞれ

$$W_1 = \{a \in W | W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle \text{ となる } a' \in W' \text{ が存在する }\},$$
$$W'_1 = \{a' \in W' | W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle \text{ となる } a \in W \text{ が存在する }\}$$

により定める.
上の 2 つめの補題より, 任意の $a \in W_1$ に対して $W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle$ となる $a' \in W'$ は一意的に存在する.
更に, a に a' を対応させると, この対応は W_1 から W'_1 への順序同型写像を定めることが分かる.
上の 3 つめの補題より, $W_1 = W$ または $W_1 = W\langle a_1\rangle$ となる $a_1 \in W$ が存在し, $W'_1 = W'$ または $W'_1 = W'\langle a'_1\rangle$ となる $a'_1 \in W'$ が存在する.
a_1, a'_1 を改めてそれぞれ a, a' と表し, (1) から (3) の何れかがなりたつことを示す.
$W_1 = W\langle a\rangle$ かつ $W'_1 = W'\langle a'\rangle$ と仮定する.
$W_1 \simeq W'_1$ だから, $W\langle a\rangle \simeq W'\langle a'\rangle$.
よって, $a \in W_1$.
これは矛盾.
したがって, (1)〜(3) の何れかがなりたつ.
次に, (1), (2) が同時になりたたないことを示す.
(1), (2) が同時になりたつと仮定する.
このとき, $W \simeq W'$ かつ $W \simeq W'\langle a'\rangle$ となる $a' \in W'$ が存在するから,

$$W' \simeq W \simeq W'\langle a'\rangle \subset W'.$$

よって, $f(a') < a'$ となる W' から W' 自身への順序を保つ単射 f が存在する.
上の 1 つめの補題より, これは矛盾.
したがって, (1), (2) は同時になりたたない.
更に, (1), (3) が同時になりたたないことを示す.
(1), (3) が同時になりたつと仮定する.
このとき, $W \simeq W'$ かつ $W\langle a\rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在するから,

$$W \simeq W' \simeq W\langle a\rangle \subset W.$$

よって, $g(a) < a$ となる W から W 自身への順序を保つ単射 g が存在する.
上の 1 つめの補題より, これは矛盾.
したがって, (1), (3) は同時になりたたない.
最後に, (2), (3) が同時になりたたないことを示す.
(2), (3) が同時になりたつと仮定する.
このとき, $W \simeq W'\langle a'\rangle$ となる $a' \in W'$ が存在し, かつ $W\langle a\rangle \simeq W'$ となる $a \in W$ が存在するから,

$$W \simeq W'\langle a'\rangle \subset W' \simeq W\langle a\rangle \subset W.$$

よって, $h(a) < a$ となる W から W 自身への順序を保つ単射 h が存在する.
上の 1 つめの補題より, これは矛盾.
したがって, (2), (3) は同時になりたたない.
以上より, (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつ. □

問題 10

1. $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, de Moivre の公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

がなりたつことを示せ. ただし, i は虚数単位である.

2. $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 等式

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\sin bx) = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

がなりたつことを示せ.

3. $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 等式

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ.

4. I を開区間とし, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ とする. n に関する数学的帰納法を用いることにより, 任意の $x \in I$ に対して

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0$$

がなりたつならば,

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

であることを示せ.

5. $(W, \leq)$ を整列集合, $(A, \leq')$ を順序集合, f を W から A への順序を保つ写像とすると, $(A, \leq')$ の部分順序集合 $(f(W), \leq')$ は整列集合であることを示せ.

6. $(W, \leq)$ を整列集合, W' を W の部分集合とすると, W' は W または W のある切片と順序同型であることを示せ.

7. $(A, \leq)$ を順序集合とする. $a, b \in A$ に対して $b \leq a$ のとき $a \leq^{-1} b$ と定めると, $\leq^{-1}$ は A の順序関係となる. なお, $\leq^{-1}$ を $\leq$ の双対順序, $(A, \leq^{-1})$ を $(A, \leq)$ の双対順序集合という. $(W, \leq)$ を整列集合とし, $\mathbf{N}$ の大小関係を考える.
(1) W が無限集合ならば, $\mathbf{N}$ は W または W のある切片と順序同型であることを示せ.
(2) $(W, \leq^{-1})$ が整列集合ならば, W は有限集合であることを示せ.

問題 10 の解答

1. あたえられた等式を $(*)$ とおく.
$n=0$ のとき, $(*)$ はなりたつ.
$n=k$ $(k=0,1,2,\dots)$ のとき, $(*)$ がなりたつと仮定すると,

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^k\\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\ &= (\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta)+i(\sin\theta\cos k\theta+\cos\theta\sin k\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta.\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ.
したがって, $n=0,1,2,\dots$ のとき, $(*)$ がなりたつ.

2. あたえられた等式を $(*)$ とおく.
$n=0$ のとき, $(*)$ はなりたつ.
$n=k$ $(k=0,1,2,\dots)$ のとき, $(*)$ がなりたつと仮定する.
$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{ax}\sin bx) &= \frac{d}{dx}\frac{d^k}{dx^k}(e^{ax}\sin bx)\\ &= \frac{d}{dx}\left\{(a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}e^{ax}\sin(bx+k\theta)\right\}\\ &= (a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}\left\{ae^{ax}\sin(bx+k\theta)+e^{ax}b\cos(bx+k\theta)\right\}\\ &= (a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+k\theta)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+k\theta)\right\}\\ &= (a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\left\{\cos\theta\sin(bx+k\theta)+\sin\theta\cos(bx+k\theta)\right\}\\ &= (a^2+b^2)^{\frac{k+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+(k+1)\theta).\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ.
したがって, $n=0,1,2,\dots$ のとき, $(*)$ がなりたつ.

3. あたえられた等式を $(*)$ とおく.
$n=0$ のとき, $(*)$ はなりたつ.
$n=k$ $(k=0,1,2,\dots)$ のとき, $(*)$ がなりたつと仮定すると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{k}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $(*)$ はなりたつ.
したがって, $n=0,1,2,\dots$ のとき, $(*)$ がなりたつ.

4. $n=0$ のとき, 明らかに題意はなりたつ.

$n = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ のとき, 題意がなりたつと仮定する.
更に, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k+1} \in \mathbf{R}$ とし, 任意の $x \in I$ に対して

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k+1} x^{k+1} = 0 \tag{$*$}$$

がなりたつと仮定する.
両辺を x で微分すると,

$$c_1 + 2c_2 x + \cdots + (k+1) c_{k+1} x^k = 0.$$

帰納法の仮定より,

$$c_1 = 2c_2 = \cdots = (k+1) c_{k+1} = 0.$$

すなわち,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{k+1} = 0.$$

$(*)$ より, $c_0 = 0$.
よって, $n = k + 1$ のときも題意はなりたつ.
したがって, $n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき, 題意がなりたつ.

5. B を $f(W)$ の空でない部分集合とする.
$f^{-1}(B)$ は W の空でない部分集合だから, $\min f^{-1}(B)$ が存在する.
ここで, $a = \min f^{-1}(B)$ とおくと, $f(a) \in B$.
$y \in B$ とすると, $f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在する.
a の定義より, $a \leq x$.
f は順序を保つ写像だから, $f(a) \leq' f(x)$. すなわち, $f(a) \leq' y$.
よって, $f(a) = \min B$.
したがって, $(f(W), \leq')$ は整列集合.

6. $W \simeq W'\langle a' \rangle$ となる $a' \in W'$ が存在すると仮定する.
このとき,

$$W \simeq W'\langle a \rangle \subset W' \subset W.$$

よって, $f(a) < a$ となる W から W 自身への順序を保つ単射 f が存在する.
これは矛盾.
よって, 整列集合の比較定理より, W' は W または W のある切片と順序同型.

7. (1) $\mathbf{N}\langle n \rangle \simeq W$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在すると仮定する.
このとき, $\mathbf{N}\langle n \rangle$ は $(n-1)$ 個の元からなる有限集合.
W は無限集合だから, 矛盾.
よって, 整列集合の比較定理より, $\mathbf{N}$ は W または W のある切片と順序同型.

(2) W が無限集合であると仮定する.
(1) より, $\mathbf{N}$ は順序関係 $\leq$ に関して W のある部分集合と順序同型.
よって, $\mathbf{N}$ の双対順序集合は順序関係 $\leq^{-1}$ に関して W のある部分集合と順序同型.
ここで, $\mathbf{N}$ の双対順序集合は最小元をもたないから, 整列集合ではない.
$(W, \leq^{-1})$ は整列集合だから, これは矛盾.
よって, W は有限集合.