§1. Euclid 空間

Euclid 空間は微分積分や線形代数においても現れる親しみのあるものであるが, これから扱っていくベクトル解析においても例外ではない. ここでは Euclid 空間に関する事実を簡単にまとめておこう.
まず, 実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表す. 自然数 n を固定しておき, n 個の実数を横に並べたもの全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ をそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視し, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともいう.
$\mathbf{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ をそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\ cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定めると, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる. 零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.
更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

により定められる, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 以下では標準内積を単に内積ということにする. $\mathbf{R}^n$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えたものが n 次元実 Euclid 空間である. ここでは複素 Euclid 空間は考えないので, $\mathbf{R}^n$ を単に n 次元 Euclid 空間といっても構わない.
x と y の内積 $\langle x, y\rangle$ は行列の積を用いて x^ty と表しておくと, 計算が容易になる場合がある. ただし, ${}^ty$ は y の転置行列である.
以下では n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える.

定理　$x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(2) $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$.
(3) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x\rangle > 0$.

$\mathbf{R}^n$ のノルム $\|\ \|$ は内積を用いて

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 定義より, x の長さ $\|x\|$ は $\|x\| \geq 0$ をみたし, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである.

定理　$x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明　(2) のみ示す.
$y = 0$ のときは明らか.
$y \neq 0$ のとき,

$$\langle y, y\rangle > 0$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\ &= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2. \end{aligned}$$

よって,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

すなわち,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

□

$\mathbf{R}^2$ の 2 点 $a = (a_1, a_2)$ および $b = (b_1, b_2)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう平面ベクトルとみなすことにする. a, b がともに零ベクトルではないとし, これらのなす角が θ で, $0 < \theta < \pi$ とする. このとき, a, b を 2 辺とする三角形に対して余弦定理を用いると,

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

だから,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta.$$

よって,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ. 特に, a と b が直交するのは $\langle a, b\rangle = 0$ のときである.
更に, a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned} \|a\|\|b\| \sin\theta &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \frac{\langle a, b\rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} \\ &= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

となり, 2 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.
$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする. 平面ベクトルの場合と同様に, a, b のなす角を θ とすると,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ.

更に, a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルで, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定められる.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向き.
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

により定める. よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと,

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$*$}$$

がなりたつ.

定理　$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると, $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

と表されるから, 上の定理と $(*)$ より,

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ に対して a, b, c の 3 重積は $\langle a \times b, c \rangle$ により定められる. a, b, c を

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

と表しておくと, 上の計算より

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \rangle &= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (\text{第 3 行に関する余因子展開}) \\ &= \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

平面ベクトルの場合と同様の計算を行うと, a, b, c を 3 辺とする平行六面体の体積は $|\langle a \times b, c \rangle|$ であることが分かり, 3 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.

問題 1

1. A を n 次の実正方行列とすると, $\mathbf{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対して

$$\langle x, yA \rangle = \langle x^t A, y \rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると, 中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

がなりたつことを示せ.

3. 外積 $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$ を求めよ.

4. $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.
(1) $\langle a \times b, c \rangle = \langle b \times c, a \rangle = \langle c \times a, b \rangle$.
(2) $(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$.
(3) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ (Jacobi の恒等式).
(4) $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$ (Lagrange の公式).

5. $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ を次の (1), (2) のように定めると, a, b, c は同一直線上にはない. a, b, c を通る平面の方程式を求めよ.
(1) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (3, 1, 2)$.
(2) $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 2, 2)$, $c = (3, 4, 5)$.

問題 1 の解答

1. 内積を行列の積を用いて表すと,

$$
\begin{aligned}
\langle x, yA\rangle &= x{}^t(yA) \\
&= x({}^tA{}^ty) \\
&= (x{}^tA){}^ty \\
&= \langle x{}^tA, y\rangle.
\end{aligned}
$$

2. ノルムの定義および内積の性質より,

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle x, -y\rangle + \|-y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).
\end{aligned}
$$

3. 求める外積は

$$
\begin{aligned}
(1,2,3)\times(4,5,6) &= (2\cdot 6 - 3\cdot 5, 3\cdot 4 - 1\cdot 6, 1\cdot 5 - 2\cdot 4) \\
&= (-3, 6, -3).
\end{aligned}
$$

4. (1) 行列式の性質より,

$$
\det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}.
$$

また,

$$
\langle a\times b, c\rangle = \det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$
\langle a\times b, c\rangle = \langle b\times c, a\rangle = \langle c\times a, b\rangle.
$$

(2) $a, b, c, (a\times b)\times c$ をそれぞれ

$$
(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (x, y, z)
$$

とおくと,

$$
(x, y, z) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\times(c_1, c_2, c_3)
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
x &= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3.
\end{aligned}
$$

よって,

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a.$$

(3) (2) より,

$$
\begin{aligned}
(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b &= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a + \langle b, a\rangle c - \langle c, a\rangle b \\
&\quad + \langle c, b\rangle a - \langle a, b\rangle c \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(4) (1), (2) より,

$$
\begin{aligned}
\langle a \times b, c \times d\rangle &= \langle b \times (c \times d), a\rangle \\
&= -\langle (c \times d) \times b, a\rangle \\
&= -\langle \langle c, b\rangle d - \langle d, b\rangle c, a\rangle \\
&= -\langle c, b\rangle\langle d, a\rangle + \langle d, b\rangle\langle c, a\rangle \\
&= \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle.
\end{aligned}
$$

5. (1) 法ベクトルを求めると,

$$
\begin{aligned}
(b - a) \times (c - a) &= (1, 1, -2) \times (2, -1, -1) \\
&= (1 \cdot (-1) - (-2)(-1), (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \\
&= (-3, -3, -3).
\end{aligned}
$$

よって, 求める平面の方程式は

$$-3(x - 1) - 3(y - 2) - 3(z - 3) = 0.$$

すなわち,

$$x + y + z = 6.$$

(2) 法ベクトルを求めると,

$$
\begin{aligned}
(b - a) \times (c - a) &= (1, 1, 1) \times (2, 3, 4) \\
&= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\
&= (1, -2, 1).
\end{aligned}
$$

よって, 求める平面の方程式は

$$(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0.$$

すなわち,

$$x - 2y + z = 0.$$