

§2. ベクトル値関数

微分積分に現れる関数は主に \mathbf{R} に値をとる関数であった. 簡単のため, 以下では1変数の場合を扱うことにしよう. すると, \mathbf{R} に値をとる関数とは区間から \mathbf{R} への写像のことである. ここでは, n を2以上の自然数とし, 区間から \mathbf{R}^n への写像, すなわちベクトル値関数を考えよう. なお, ベクトル値関数に対して, \mathbf{R} に値をとる関数をスカラー値関数ともいう.

f を区間 I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の関数 f_1, f_2, \dots, f_n を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (t \in I) \quad (*)$$

と表すことができる.

g も I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. \mathbf{R}^n はベクトル空間であるから, I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 $f + g$ を

$$(f + g)(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \dots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

また, c を I で定義されたスカラー値関数とすると, \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \dots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

更に, \mathbf{R}^n の標準内積を用いると, I で定義されたスカラー値関数 $\langle f, g \rangle$ を

$$\langle f, g \rangle(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

また, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

\mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数に対しては外積を考えることもできる.

f, g を区間 I で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数とする. このとき, I で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

ベクトル値関数 f が (*) のように表されているとき, 各 f_1, f_2, \dots, f_n が I で微分可能ならば, f は I で微分可能であるという. このとき, I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定め, f' を f の微分という. このように, ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよいのである.

定理 f, g を区間 I で微分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル関数とすると、次の (1)~(4) がなりたつ。

- (1) $(f + g)' = f' + g'$.
 (2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると、 $(cf)' = c'f + cf'$.
 (3) $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$.
 (4) $n = 3$ のとき、 $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

証明 (1): 成分毎に考え、微分の線形性を用いればよい。

(2): 成分毎に考え、積の微分法を用いればよい。

(3): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく、

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle'(t) &= \langle f(t), g(t) \rangle' \\ &= (f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \dots + f_n(t)g_n(t))' \\ &= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \dots + (f_n(t)g_n(t))' \\ &= (f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t)) + (f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t)) + \dots + (f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\ &= f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + \dots + f_n'(t)g_n(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + \dots + f_n(t)g_n'(t) \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle \\ &= \langle f', g \rangle(t) + \langle f, g' \rangle(t) \\ &= (\langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle)(t). \end{aligned}$$

よって、

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle.$$

(4): f, g の各成分を (3) の証明のように表しておき、

$$(f \times g)(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t)) \quad (t \in I)$$

とおく。

外積の定義より、

$$h_1(t) = f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), \quad h_2(t) = f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), \quad h_3(t) = f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t).$$

よって、

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= (f_2'(t)g_3(t) + f_2(t)g_3'(t)) - (f_3'(t)g_2(t) + f_3(t)g_2'(t)) \\ &= (f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t)) + (f_2(t)g_3'(t) - f_3(t)g_2'(t)). \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= (f_3'(t)g_1(t) - f_1'(t)g_3(t)) + (f_3(t)g_1'(t) - f_1(t)g_3'(t)), \\ h_3'(t) &= (f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t)) + (f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t)) \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} (f \times g)'(t) &= (f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t), f_3'(t)g_1(t) - f_1'(t)g_3(t), f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t)) \\ &\quad + (f_2(t)g_3'(t) - f_3(t)g_2'(t), f_3(t)g_1'(t) - f_1(t)g_3'(t), f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t)) \\ &= (f' \times g)(t) + (f \times g')(t). \end{aligned}$$

したがって,

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

□

ベクトル値関数の積分についても考えよう.

f を閉区間 $[a, b]$ で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とし,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく.

各 f_1, f_2, \dots, f_n が $[a, b]$ で積分可能なとき, $\int_a^b f(t) dt \in \mathbf{R}^n$ を

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

により定め, これを f の $[a, b]$ における定積分という. このとき, f は $[a, b]$ で積分可能であるという.

スカラー値関数の定積分の線形性はベクトル値関数の場合にも同様になりつつ.

定理 f, g を閉区間 $[a, b]$ で積分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とする. このとき, 次の (1), (2) がなりつつ.

$$(1) \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

$$(2) c \in \mathbf{R} \text{ とすると, } \int_a^b (cf)(t) dt = c \int_a^b f(t) dt.$$

証明 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表し, 成分毎に計算すればよい.

□

f を閉区間 $[a, b]$ で積分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a, b]$ で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 F を

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds \quad (t \in [a, b])$$

により定める. これを f の不定積分という.

微分積分学の基本定理より,

$$F'(t) = f(t) \quad (t \in [a, b])$$

がなりつつ. 更に,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

がなりつつ.

問題 2

1. \mathbf{R} で定義された \mathbf{R}^2 に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2), \quad g(t) = (t^3, t^4) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $\langle f, g \rangle$ を求めよ.

(2) $\int_0^1 \|f\|(t) dt$ を求めよ.

(3) $\int_0^1 (f + g)(t) dt$ を求めよ.

2. \mathbf{R} で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $f \times f'$ を求めよ.

(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ.

3. f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ.
4. f を区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ.
5. f を区間 I で定義された 2 回微分可能な \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数とする. I で定義されたスカラー値関数 $c(t)$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち t に依存しないベクトルであることを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) まず,

$$g'(t) = (3t^2, 4t^3).$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle f, g' \rangle(t) &= \langle f(t), g'(t) \rangle \\ &= \langle (t, t^2), (3t^2, 4t^3) \rangle \\ &= t \cdot 3t^2 + t^2 \cdot 4t^3 \\ &= 3t^3 + 4t^5. \end{aligned}$$

(2) $t \in [0, 1]$ のとき,

$$\begin{aligned} \|f\|(t) &= \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1 + t^2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|f\|(t) dt &= \int_0^1 t\sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}. \end{aligned}$$

(3) 直接計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f + g)(t) dt &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt \\ &= \left(\int_0^1 t dt, \int_0^1 t^2 dt \right) + \left(\int_0^1 t^3 dt, \int_0^1 t^4 dt \right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1, \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 \right) + \left(\left[\frac{1}{4}t^4 \right]_0^1, \left[\frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{15} \right). \end{aligned}$$

2. (1) まず,

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

よって,

$$\begin{aligned} (f \times f')(t) &= (t, t^2, t^3) \times (1, 2t, 3t^2) \\ &= (t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t, t^3 \cdot 1 - t \cdot 3t^2, t \cdot 2t - t^2 \cdot 1) \\ &= (t^4, -2t^3, t^2). \end{aligned}$$

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} f''(t) &= (1', (2t)', (3t^2)') \\ &= (0, 2, 6t). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle f \times f', f'' \rangle(t) &= \langle (t^4, -2t^3, t^2), (0, 2, 6t) \rangle \\ &= t^4 \cdot 0 + (-2t^3) \cdot 2 + t^2 \cdot 6t \\ &= 2t^3. \end{aligned}$$

3. まず,

$$\begin{aligned} (\|f\|^2)' &= \langle f, f \rangle' \\ &= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\ &= 2\langle f, f' \rangle. \end{aligned}$$

仮定より, $\|f\|^2$ は $t = t_0$ で最大または最小となるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \|f\|^2 \\ &= 2\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle = 0.$$

すなわち, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する.

4. まず, $\|f\|$ が定数関数であると仮定すると, $\|f\|^2$ も定数関数.
よって,

$$\begin{aligned} 0 &= (\|f\|^2)' \\ &= 2\langle f, f' \rangle. \end{aligned}$$

したがって, 任意の $t \in I$ に対して

$$\langle f(t), f'(t) \rangle = 0.$$

すなわち, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交する.

上の計算は逆に辿ることもできるから, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交すると仮定すると, $\|f\|$ は定数関数.

5. 仮定より,

$$\begin{aligned} (f \times f')' &= f' \times f' + f \times f'' \\ &= 0 + f \times (cf) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $f \times f'$ の各成分は定数となるから, $f \times f'$ は定ベクトル.