§6. 線積分と Green の定理

$\mathbf{R}^n$ 内の曲線とその曲線上で定義されたベクトル場に対して, 線積分というものを考えることができる. ただし, 線積分を定義するためには曲線は向きというものを込みにして考える必要がある.
区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数として定義される $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, γ の像の点 $\gamma(a)$ が γ に沿って $\gamma(b)$ まで進むと考えるとき,

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n,\ \text{向き}\ t : a \to b$$

と表すことにする. このとき, γ を向き付けられた曲線という.
1 つの曲線に対しては 2 通りの向きが定まる. 上の γ とは逆向きの曲線を $\overline{\gamma}$ と表すことにする.

定義　区分的に C^1 級, すなわち有限個の点を除き C^1 級の向き付けられた $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n,\ \text{向き}\ t : a \to b$$

および γ の像で連続な n 次元ベクトル場 F に対して

$$\int_\gamma F\overrightarrow{ds} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

とおき, これを F の γ 上の線積分という.

注意　線積分の値は曲線の向きを変えると符号が変わる. 実際,

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\gamma}} F\overrightarrow{ds} &= \int_b^a \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= -\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= -\int_\gamma F\overrightarrow{ds}\end{aligned}$$

である.
しかし, 向きを変えない変数変換に対しては線積分の値は変わらない. 実際, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ かつ $\varphi'(\tau)>0$ となる変数変換 $t=\varphi(\tau)$ を考えると,

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt &= \int_\alpha^\beta \langle F(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau))\rangle \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \langle F((\gamma\circ\varphi)(\tau)), (\gamma\circ\varphi)'(\tau)\rangle d\tau\end{aligned}$$

となり, $\displaystyle\int_\gamma F\overrightarrow{ds}$ は γ の径数付けに依存しない.
よって, 線積分は曲線の像とその向きのみによって定まる.

例　向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 1$$

を

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad (t \in [0,1])$$

により定め, ベクトル場

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

を

$$F(x,y) = (x, -y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.
このとき,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\overrightarrow{ds} &= \int_0^1 \langle (t, -t^2), (1, 2t) \rangle dt \\
&= \int_0^1 (t - 2t^3) dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

以下では, 2 次元ベクトル場の線積分に関する Green の定理について述べよう.
D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となるような $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とする. ただし, D の境界には D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておき, これを ∂D と表す. また, §5 において扱ったように, C^1 級の 2 次元ベクトル場に対しては回転というスカラー場を考えることができたことを思い出そう.

Green の定理　F を D 上の C^1 級の 2 次元ベクトル場とする. このとき,

$$\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} = \iint_D \operatorname{rot} F dxdy.$$

証明　F は

$$F = (P, Q)$$

と表すことができる.
積分の線形性より, $P = 0$ の場合と $Q = 0$ の場合に分けて考えればよいが, $Q = 0$ の場合のみ示す. $P = 0$ の場合も同様である.
まず, D が x について単純な領域

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

のときを考える.
向き付けられた平面曲線

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [a,b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : a \to b, \\
&\gamma_2 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : \varphi_1(b) \to \varphi_2(b), \\
&\gamma_3 : [a,b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : b \to a, \\
&\gamma_4 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : \varphi_2(a) \to \varphi_1(a)
\end{aligned}$$

をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, \varphi_1(t)) \quad (t \in [a,b]), \\
\gamma_2(t) &= (b, t) \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]), \\
\gamma_3(t) &= (t, \varphi_2(t)) \quad (t \in [a,b]), \\
\gamma_4(t) &= (a, t) \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)])
\end{aligned}
$$

により定める.
ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} F\overrightarrow{ds} &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} \langle (P(\gamma_2(t)), 0), (0,1) \rangle dt \\
&= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} 0 dt \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\int_{\gamma_4} F\overrightarrow{ds} = 0
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} &= \int_{\gamma_1} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_2} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_4} F\overrightarrow{ds} \\
&= \int_{\gamma_1} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\overrightarrow{ds} \\
&= \int_a^b \langle (P(\gamma_1(t)), 0), (1, \varphi_1'(t)) \rangle dt + \int_b^a \langle (P(\gamma_3(t)), 0), (1, \varphi_2'(t)) \rangle dt \\
&= -\int_a^b (P(t, \varphi_2(t)) - P(t, \varphi_1(t))) dt \\
&= -\int_a^b [P(x,y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\
&= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \\
&= \iint_D \mathrm{rot}\, F dxdy.
\end{aligned}
$$

よって, Green の定理がなりたつ.
次に, D が一般のときを考える.
このとき, D を上のような領域に分割しておくと, 分割された各領域において Green の定理がなりたつ.
また, 各領域の境界のうち D の内部にあるものについては, 向きが逆のものが対で現れるから, それらに沿った線積分の値は 0 となる.
したがって, Green の定理がなりたつ. $\square$

問題 6

1. D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とし, D 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x) \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$$

により定める.

(1) 線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds}$ は D の面積に等しいことを示せ. なお, $F(x,y)=(0,x)$ または $F(x,y)=(-y,0)$ のときも上の線積分は D の面積に等しいことが分かる.

(2) $a,b>0$ とする. D が楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ.

(3) $a>0$ とする. D がアステロイド

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ.

(4) $a>0$ とする. 極座標 (r,θ) を用いて, D がカージオイド

$$r=a(1+\cos\theta) \quad (\theta\in[0,2\pi])$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ.

2. $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\})$$

により定める.

(1) $\operatorname{rot} F=0$ を示せ.

(2) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t:0\to 2\pi$$

を

$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t) \quad (t\in[0,2\pi])$$

により定める. 線積分 $\displaystyle\int_\gamma F\overrightarrow{ds}$ の値を求めよ.

問題 6 の解答

1. (1) Green の定理より,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} &= \iint_D \mathrm{rot}\, F dxdy \\
&= \iint_D \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} dxdy \\
&= \iint_D dxdy.
\end{aligned}
$$

これは D の面積である.

(2) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると, γ は題意の楕円を表す.

(1) より, D の面積は

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-b\sin t, a\cos t), (-a\sin t, b\cos t) \right\rangle dt \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt \\
&= \pi ab.
\end{aligned}
$$

(3) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると, γ は題意のアステロイドを表す.

(1) より, D の面積は

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-a\sin^3 t, a\cos^3 t), (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t) \right\rangle dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= \frac{3a^2}{2} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(1 - \sin^2 t) dt \\
&= 6a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \right) \\
&= 6a^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

(4) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (a(1+\cos t)\cos t, a(1+\cos t)\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると, γ は題意のカージオイドを表す.
(1) より, D の面積は

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma F\overrightarrow{ds} \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-a(1+\cos t)\sin t, a(1+\cos t)\cos t), \right. \\
&\qquad\qquad \left. (-a\sin t - 2a\cos t\sin t, a\cos t - a\sin^2 t + a\cos^2 t) \right\rangle dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)\left\{\sin t(\sin t + 2\sin t\cos t) + \cos t(\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t)\right\} dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2 dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos t+\cos^2 t) dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}t + 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned}$$

2. (1) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) 求める値は

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$