§8. 曲面積

閉区間 $[a,b]$ で C^1 級のスカラー値関数 f のグラフとして表される曲線の長さが定積分

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

によりあたえられることは 1 変数の微分積分でも扱われることである．これは曲線上に分点を取ることによって曲線を折れ線で近似し, 更に分点を増やして折れ線の長さの和の極限を考えることによって得られる．
上の考え方を 2 変数のスカラー値関数のグラフとして表される曲面に適用したらどうであろうか. 実は, 曲面を内接する多角形で近似すると, 面積の和の極限が存在しない場合があることが Schwarz の提灯という例によって知られている．詳しい説明は省略するが, 曲面の面積, すなわち曲面積は外接するような多面体で考えると上手くいくのである．
D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な部分集合, f を D で C^1 級のスカラー値関数とする．このとき, f のグラフの曲面積は重積分

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

によりあたえられる．
以下では広義の重積分が現れることがあるが, 気にしないで形式的に計算してみることにする．

例　$a>0$ とし, 原点中心, 半径 a の球面

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x^2+y^2+z^2=a^2\}$$

の曲面積, すなわち表面積を求める．
この球面の $z\geq 0$ の部分は

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2+y^2\leq a^2\}$$

とおくと,

$$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad ((x,y)\in D)$$

により定められるスカラー値関数 f のグラフである．
ここで,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

だから,

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2&=1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}\\&=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E=\{(r,\theta)|0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

へ写される．

よって, 求める表面積は $z \geq 0$ の部分の表面積を 2 倍して,

$$
\begin{aligned}
2\iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy &= 2a\iint_E \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta \\
&= 2a\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\int_0^{2\pi}d\theta \\
&= 2a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a \cdot 2\pi \\
&= 4\pi a^2.
\end{aligned}
$$

回転体という曲面の曲面積は次の定理のように 1 変数の定積分に帰着される.

定理 f を閉区間 $[a,b]$ で C^1 級の非負のスカラー値関数とする. xy 平面上の f のグラフを xyz 空間の中で x 軸の周りに回転して得られる曲面の曲面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

証明 あたえられた曲面は

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 | a\leq x\leq b,\ y^2+z^2=(f(x))^2\}$$

と表される.
$z \geq 0$ の部分を考えると,

$$z=\sqrt{(f(x))^2-y^2} \quad ((x,y)\in D).$$

ただし,

$$D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ -f(x)\leq y\leq f(x)\}.$$

このとき,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}$$

だから,

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=(f(x))^2\frac{1+(f'(x))^2}{(f(x))^2-y^2}.$$

よって, あたえられた曲面の曲面積は $z \geq 0$ の部分の曲面積を 2 倍して,

$$
\begin{aligned}
2\iint_D f(x)\sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{(f(x))^2-y^2}}dxdy &= 2\int_a^b dx\int_{-f(x)}^{f(x)} f(x)\sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{(f(x))^2-y^2}}dy \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_{y=-f(x)}^{y=f(x)}dx \\
&= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx \\
&= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.
\end{aligned}
$$

□

例　$a > 0$ とすると, 原点中心, 半径 a の球面は

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

により定められるスカラー値関数 f のグラフを xyz 空間の中で x 軸の周りに回転して得られる. ここで,

$$\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

だから, この球面の表面積は

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx &= 2\pi \int_{-a}^{a} adx \\ &= 2\pi a \cdot 2a \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^2$ の面積確定な部分集合 D が極座標変換を用いて集合 E へ写されるとし, f を D で C^1 級のスカラー値関数とする. ここで, $z = f(x, y)$ と極座標変換の合成を考えると,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

がなりたつことに注意しよう. このことを用いると, 変数変換公式より, f のグラフの曲面積は

$$\iint_E \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\, rdrd\theta$$

によりあたえられる.

例　$a > 0$ とし, D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

により定まる領域とする.
極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される.
よって, 楕円放物面の一部

$$\{(x, y, z) | (x, y) \in D,\ z = x^2 + y^2\}$$

すなわち,

$$\{(r, \theta, z) | (r, \theta) \in E,\ z = r^2\}$$

の曲面積は

$$\begin{aligned} \iint_E \sqrt{1 + 4r^2}\, rdrd\theta &= \int_0^a r\sqrt{1 + 4r^2}dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a \cdot 2\pi \\ &= \frac{\pi}{6}\{(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\}. \end{aligned}$$

問題 8

1. $0 < a < b$ とする．円

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+(y-b)^2=a^2\}$$

を xyz 空間の中で x 軸の周りに回転して得られる曲面の曲面積を求めよ．なお，この曲面を輪環面，円環面またはトーラスという．

2. $a > 0$ とする．アステロイド

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}$$

を xyz 空間の中で x 軸の周りに回転して得られる曲面の曲面積を求めよ．

3. $a > 0$ に対して

$$f(x)=a\cosh\frac{x}{a} \quad (x\in\mathbf{R})$$

により定まるスカラー値関数 f のグラフを懸垂線またはカテナリーといい，xyz 空間の中でカテナリーを x 軸の周りに回転して得られる曲面を懸垂面またはカテノイドという．
カテナリーの一部

$$\{(x,f(x)) | 0\leq x\leq b\}$$

を x 軸の周りに回転して得られるカテノイドの一部の曲面積を求めよ．

4. $a > 0$ に対して

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t)) \quad (t\in[0,2\pi])$$

により定まる平面曲線

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$$

を擺線またはサイクロイドという．xyz 空間の中で $0\leq t\leq\pi$ の範囲でサイクロイドを x 軸の周りに回転して得られる曲面の曲面積を求めよ．

5. $a > 0$ とし，D を

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+y^2\leq ax\}$$

により定まる領域とする．このとき，

$$f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad ((x,y)\in D)$$

により定まるスカラー値関数 f のグラフの曲面積を求めよ．

問題 8 の解答

1. トーラスは 2 つの半円

$$\{(x,y) | -a \leq x \leq a,\ y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

を回転して得られることに注意する.
(x, y) を半円上の点とすると,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{複号同順})$$

だから, 求める曲面積は

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\
&= 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
&= 4\pi ab \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_{-a}^{a} \\
&= 4\pi ab \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
&= 4\pi^2 ab.
\end{aligned}$$

2. $0 \leq x \leq a$ に対して

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

とおくと,

$$f'(x) = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

求める曲面積は $0 \leq x \leq a$ の部分の曲面積を 2 倍して,

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2\pi \int_0^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 4\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)} dx \\
&= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \left[-\frac{3}{5} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{5}{2}} \right]_0^a \\
&= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{5} a^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{12}{5} \pi a^2.
\end{aligned}$$

3. 求める曲面積は

$$\begin{aligned}
2\pi \int_0^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \int_0^b a \cosh \frac{x}{a} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx \\
&= 2\pi a \int_0^b \cosh^2 \frac{x}{a} dx \\
&= 2\pi a \int_0^b \frac{1 + \cosh \frac{2x}{a}}{2} dx
\end{aligned}$$

$$= 2\pi a \left[\frac{1}{2}x + \frac{a}{4}\sinh\frac{2x}{a}\right]_0^b$$
$$= \frac{\pi a}{2}\left(2b + a\sinh\frac{2b}{a}\right).$$

4. $\gamma = (x, y)$ とおくと, 求める曲面積は

$$\begin{aligned}
2\pi\int_0^{\pi a} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx &= 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\sqrt{1+\left\{\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right\}^2}a(1-\cos t)dt \\
&= 2\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt \\
&= 2\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}dt \\
&= 2\pi a^2\int_0^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt \\
&= 8\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt \\
&= 16\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta \quad (t = 2\theta) \\
&= 16\pi a^2\cdot\frac{2}{3} \\
&= \frac{32}{3}\pi a^2.
\end{aligned}$$

5. 極座標変換を用いると, $y \geq 0$ となる D の部分は領域

$$E = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0 \leq r \leq a\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

へ写される.
よって, 求める曲面積は曲面

$$\{(r,\theta,z) | (r,\theta) \in E,\ z = \sqrt{a^2-r^2}\}$$

の曲面積を 2 倍して,

$$\begin{aligned}
2\iint_E \sqrt{1+\left(\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)^2}rdrd\theta &= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr \\
&= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta \\
&= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\theta+1)d\theta \\
&= 2a^2\left(-1+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= a^2(\pi-2).
\end{aligned}$$