§9. 第一基本形式

$\mathbf{R}^3$ 内の曲面の接平面は 2 次元のベクトル空間となるが, 更に自然な内積を考えることができる. このことから曲面に対して第一基本形式というものを定めることができる.
曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して $(u_0, v_0) \in D$ を固定しておく.
Π を $p(u_0, v_0)$ における p の接平面とすると,

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

で, Π は 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下では, この部分空間も Π と表すことにする.
$\mathbf{R}^3$ の標準内積を用いて,

$$p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \in \Pi \quad ((u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{R}^2)$$

に対して

$$\langle p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \rangle \in \mathbf{R}$$

を対応させる. $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$ は 1 次独立であるから, この対応は Π の内積を定める.
一方, 接平面の元は曲面上の曲線の微分を用いても表すことができる.
空間曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

の像が p の像に含まれているとする. このとき, γ を p 上の曲線という. γ は $[a, b]$ から D への写像と p を合成することにより,

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表すことができる.
合成関数の微分法より,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v'$$

だから, 特に

$$c \in [a, b],\ \gamma(c) = p(u_0, v_0)$$

のとき,

$$u_1 = u'(c),\ v_1 = v'(c)$$

とおくと,

$$\gamma'(c) = p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1$$

となる.
また,

$$\begin{aligned}\|\gamma'\|^2 &= \langle p_u u' + p_v v', p_u v' + p_v v' \rangle \\ &= \langle p_u, p_u \rangle (u')^2 + 2\langle p_u, p_v \rangle u'v' + \langle p_v, p_v \rangle (v')^2\end{aligned}$$

だから, D で定義されたスカラー値関数 E, F, G を

$$E = \langle p_u, p_u \rangle,\ F = \langle p_u, p_v \rangle,\ G = \langle p_v, p_v \rangle$$

により定めると,

$$\|\gamma'\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

となる.
特に, γ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

である.
上の式の根号の中身に注目し,

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とおき, これを p の第一基本形式という. $du^2, dudv, dv^2$ というものには数学的な意味があるが, ここでは形式的に考えることにする.

例　2 変数のスカラー値関数のグラフを

$$p(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

と表しておくと,

$$p_u = (1, 0, f_u),\ p_v = (0, 1, f_v).$$

よって,

$$\langle p_u, p_u \rangle = 1 + f_u^2,\ \langle p_u, p_v \rangle = f_u f_v,\ \langle p_v, p_v \rangle = 1 + f_v^2.$$

したがって, p の第一基本形式は

$$(1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v dudv + (1 + f_v^2)dv^2.$$

第一基本形式は曲面上の曲線の長さを求める場合ばかりでなく, 曲面積を求める場合にも現れる.
曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して $\|p_u \times p_v\| dudv$ を面積要素という. また, 面積要素が D で重積分可能なとき,

$$\iint_D \|p_u \times p_v\| dudv$$

を p の面積という. なお, 曲面の面積は曲面の径数付けに依存しないことが, 変数変換公式より分かる.
p の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると, 問題 1 においても現れた Lagrange の公式より,

$$\begin{aligned}\|p_u \times p_v\|^2 &= \langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2.\end{aligned}$$

よって, p の面積要素は $\sqrt{EG-F^2}dudv$ とも表され, 特に $EG-F^2$ は常に正である.
上の例より, 2 変数のスカラー値関数のグラフに対する面積要素は

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}dudv &= \sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)-(f_uf_v)^2}dudv \\ &= \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}dudv.\end{aligned}$$

この式は §8 において現れたものと同じである.

例 (柱面)
平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u,v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u,v) \in D)$$

により定める. p を柱面という. 特に, γ が円のときは円柱である.
曲線 γ は正則であるとしているので,

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2.\end{aligned}$$

よって, p は正則である.
また,

$$p_u \times p_v = (y', -x', 0)$$

だから, p の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(y', -x', 0)}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}.$$

更に,

$$\langle p_u, p_u\rangle = (x')^2+(y')^2,\ \langle p_u, p_v\rangle = 0,\ \langle p_v, p_v\rangle = 1$$

だから, p の第一基本形式は

$$\{(x')^2+(y')^2\}du^2 + 0\cdot dudv + 1\cdot dv^2.$$

これを

$$\{(x')^2+(y')^2\}du^2 + dv^2$$

と表す.
したがって, p の面積要素は

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2}dudv.$$

特に, γ が弧長により径数付けられているときは p の単位法ベクトル, 第一基本形式, 面積要素はそれぞれ

$$(y', -x', 0),\ du^2+dv^2,\ dudv.$$

問題 9

1. $a, b, c > 0$ とする. 楕円面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め, p の第一基本形式を

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

とする.
(1) E, F, G を求めよ.
(2) $a = b = c$ のとき, p の面積要素を求めよ.

2. 平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. ただし, f は 0 とはならないとする. このとき, 回転面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.
(1) p は正則であることを示せ.
(2) f が常に正であるとき, p の単位法ベクトルを求めよ.
(3) p の第一基本形式を求めよ.
(4) p の面積要素を求めよ.
(5) $0 < a < b$ とし,

$$f(t) = b + a \cos t,\ g(t) = a \sin t\ (t \in [0, 2\pi])$$

とすると, p はトーラスとなる. (4) を用いて, このときの p の面積を求めよ.

(6) $a, b > 0$ とし,

$$f(t) = a \cosh \frac{t}{a},\ g(t) = t\ (t \in [0, b])$$

とすると, p はカテノイドの一部となる. (4) を用いて, このときの p の面積を求めよ.

問題 9 の解答

1. (1) まず,

$$p_u = (a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, -c\sin u),\ p_v = (-a\sin u\sin v, b\sin u\cos v, 0).$$

よって,

$$\begin{aligned} E &= \langle p_u, p_u\rangle \\ &= a^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\sin^2 v + c^2\sin^2 u, \\ F &= \langle p_u, p_v\rangle \\ &= (b^2 - a^2)\cos u\sin u\cos v\sin v, \\ G &= \langle p_v, p_v\rangle \\ &= a^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\cos^2 v. \end{aligned}$$

(2) $a = b = c$ のとき,

$$E = a^2,\ F = 0,\ G = a^2\sin^2 u.$$

よって, p の面積要素は

$$\sqrt{EG - F^2}dudv = a^2\sin u dudv.$$

2. (1) $(u, v) \in D$ に対して

$$x(u, v) = f(u)\cos v,\ y(u, v) = f(u)\sin v,\ z(u, v) = g(u)$$

とおくと,

$$x_u = f'(u)\cos v,\ y_u = f'(u)\sin v,\ z_u = g'(u),$$

$$x_v = -f(u)\sin v,\ y_v = f(u)\cos v,\ z_v = 0.$$

更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$A = f(u)f'(u),\ B = -f(u)g'(u)\cos v,\ C = -f(u)g'(u)\sin v.$$

γ は正則で, f は 0 とはならないから,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (f(u))^2(f'(u))^2 + (f(u))^2(g'(u))^2\cos^2 v + (f(u))^2(g'(u))^2\sin^2 v \\ &= (f(u))^2\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって, A, B, C の内の少なくとも 1 つは 0 ではない.
したがって, 任意の $(u, v) \in D$ に対して

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u(u, v) \\ p_v(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

すなわち, p は正則.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (-f(u)g'(u)\cos v, -f(u)g'(u)\sin v, f(u)f'(u)) \\ &= f(u)(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)). \end{aligned}$$

f は常に正だから, p の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}.$$

(3) (1) の計算より,

$$\langle p_u, p_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2,\ \langle p_u, p_v \rangle = 0,\ \langle p_v, p_v \rangle = (f(u))^2.$$

よって, p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} du^2 + (f(u))^2 dv^2.$$

(4) (3) より, p の面積要素は

$$|f(u)|\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} dudv.$$

(5) (4) より, p の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D |b + a\cos u|\sqrt{(-a\sin u)^2 + (a\cos u)^2} dudv &= \iint_D a(b + a\cos u) dudv \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} a(b + \cos u) dv \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (ab + a\cos u) du \\ &= 2\pi [abu + a\sin u]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

(6) (4) より, p の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D \left| a\cosh\frac{u}{a} \right| \sqrt{\sinh^2\frac{u}{a} + 1^2} dudv &= \iint_D a\cosh^2\frac{u}{a} dudv \\ &= \int_0^b du \int_0^{2\pi} a\cosh^2\frac{u}{a} dv \\ &= 2\pi a \int_0^b \frac{1 + \cosh\dfrac{2u}{a}}{2} du \\ &= 2\pi a \left[\frac{1}{2}u + \frac{a}{4}\sinh\frac{2u}{a}\right]_0^b \\ &= \frac{\pi a}{2}\left(2b + a\sinh\frac{2b}{a}\right). \end{aligned}$$