§10. 面積分

$\mathbf{R}^3$ 内の曲面とその曲面上で定義されたスカラー場またはベクトル場に対して, 面積分というものを考えることができる.
まず, スカラー場の面積分から定義しよう.
D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

および p の像で定義されたスカラー場 φ に対して

$$\iint_p \varphi dA = \iint_D \varphi(p(u,v))\|p_u \times p_v\| dudv$$

とおき, これを φ の p 上の面積分という.
特に, $\varphi = 1$ とすると, 上の面積分の値は p の面積に等しい.
なお, 変数変換公式より, 面積分は曲面の径数付けに依存しないことが分かる.

例 D を

$$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 | v \geq 0,\ u^2+v^2 \leq 1\}$$

により定まる領域, f を

$$f(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2} \quad ((u,v) \in D)$$

により定まる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3 \quad ((u,v) \in D)$$

を f のグラフ

$$p(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

として表しておく.
また, $(u,v) \in D \setminus \{0\}$ に対して

$$\varphi(p(u,v)) = \frac{v}{u^2+v^2}$$

とおく.
φ は $p(0)$ では定義されていないため, φ の p 上の面積分は広義の重積分となるが, 気にしないで形式的に計算してみよう.
§9 において扱ったことより,

$$\begin{aligned}\|p_u \times p_v\| &= \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} \\ &= \sqrt{1+\frac{u^2}{1-u^2-v^2}+\frac{v^2}{1-u^2-v^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

へ写される.

よって,

$$\begin{aligned}\iint_p \varphi dA &= \iint_D \frac{v}{u^2+v^2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv \\ &= \iint_E \frac{r\sin\theta}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta \\ &= \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \\ &= \left[\sin^{-1} r\right]_0^1 [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot 2 \\ &= \pi.\end{aligned}$$

次に, ベクトル場の面積分を定義しよう.
D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

および p の像で定義された 3 次元ベクトル場 F に対して

$$\iint_p F\overrightarrow{dA} = \iint_D \langle F(p(u,v)), p_u \times p_v\rangle dudv$$

とおき, これを F の p 上の面積分という.

注意　上の定義において, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$$

だから, ベクトル場 F の面積分はスカラー場 $\langle F, \nu\rangle$ の面積分に等しい. 実際,

$$\begin{aligned}\iint_p F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle F(p(u,v)), \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}\right\rangle \|p_u \times p_v\| dudv \\ &= \iint_p \langle F, \nu\rangle dA.\end{aligned}$$

例　上の例と同じ曲面 p を考え, 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y,z) = (0,0,z) \quad ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.
問題 7 において扱ったことより,

$$\begin{aligned}p_u \times p_v &= (-f_u, -f_v, 1) \\ &= \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right).\end{aligned}$$

よって, 上の例と同じ極座標変換を用いると,

$$
\begin{aligned}
\iint_p F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle (0,0,\sqrt{1-u^2-v^2}), \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)\right\rangle dudv \\
&= \iint_D \sqrt{1-u^2-v^2}dudv \\
&= \iint_E \sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}drd\theta \\
&= \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr \int_0^\pi d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \cdot \pi \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

面積分の値が曲面の径数付けに依存しないことを次の例で直接確かめてみよう.
まず, 上の曲面は径数付けを変えて,

$$D' = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi],$$

$$q(u,v) = (\sin u\cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad ((u,v) \in D')$$

とも表すことができる.
このとき, 問題 7 において扱ったことより,

$$q_u \times q_v = (\sin u)(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u).$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\iint_q F\overrightarrow{dA} &= \iint_{D'} \langle (0,0,\cos u), (\sin u)(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)\rangle dudv \\
&= \iint_{D'} \sin u\cos^2 u dudv \\
&= \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\cos^2 u dudv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\cos^2 u du \int_0^\pi dv \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3 u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

となり, これは上で求めた値と一致する.

問題 10

1. $a > 0$ とし, 原点中心, 半径 a の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき,

$$p_u \times p_v = (a^2 \sin u)(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

である.

(1) p の像で定義されたスカラー場 φ を

$$\varphi(p(u, v)) = \frac{\sin v}{\sin u} \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p \varphi dA$ の値を求めよ.

(2) $b \in \mathbf{R}$ とし, 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^b (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p F\overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

2. $0 < a < b$ とし, トーラス

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = ((b + a \cos u) \cos v, (b + a \cos u) \sin v, a \sin u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. このとき, 問題 9 において扱ったことから分かるように,

$$p_u \times p_v = -a(b + a \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

である.

(1) スカラー場 φ を

$$\varphi(x, y, z) = z^2 \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p \varphi dA$ の値を求めよ.

(2) 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. 面積分 $\displaystyle\iint_p F\overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

問題 10 の解答

1. (1) まず,

$$\|p_u \times p_v\| = a^2 \sin u.$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_p \varphi dA &= \iint_D \frac{\sin v}{\sin u} a^2 \sin u du dv \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v du dv \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{\pi} \sin v dv \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \cdot [-\cos v]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \cdot 2 \\ &= \pi a^2.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$\|p(u,v)\|^2 = a^2$$

だから,

$$\begin{aligned}\langle F(p(u,v)), p_u \times p_v \rangle &= \langle (a^2)^b p(u,v), (a \sin u) p(u,v) \rangle \\ &= a^{2b+3} \sin u.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_p F \overrightarrow{dA} &= \iint_D a^{2b+3} \sin u du dv \\ &= a^{2b+3} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du dv \\ &= a^{2b+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du \int_0^{\pi} dv \\ &= a^{2b+3} [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \\ &= \pi a^{2b+3}.\end{aligned}$$

2. (1) まず,

$$\|p_u \times p_v\| = a(b + a \cos u).$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_p \varphi dA &= \iint_D (a \sin u)^2 a(b + a\cos u) du dv \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (b \sin^2 u + a \sin^2 u \cos u) du dv \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \left(b \frac{1 - \cos 2u}{2} + a \sin^2 u \cos u \right) du \int_0^{2\pi} dv \\ &= a^3 \left[b \left(\frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u \right) + \frac{a}{3} \sin^3 u \right]_0^{2\pi} \cdot 2\pi \\ &= 2\pi^2 a^3 b.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}\langle F(p(u,v)), p_u \times p_v\rangle &= \langle((b+a\cos u)\cos v, (b+a\cos u)\sin v, a\sin u), \\ &\quad - a(b+a\cos u)(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)\rangle \\ &= -a(b+a\cos u)\{(b+a\cos u)\cos u + a\sin^2 u\} \\ &= -a(b+a\cos u)(a+b\cos u) \\ &= -a\{ab+(a^2+b^2)\cos u + ab\cos^2 u\}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_p F\overrightarrow{dA} &= -a\iint_D \{ab+(a^2+b^2)\cos u + ab\cos^2 u\}dudv \\ &= -a\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ab+(a^2+b^2)\cos u + ab\frac{1+\cos 2u}{2}\right\}dudv \\ &= -a\int_0^{2\pi}\left\{\frac{3}{2}ab+(a^2+b^2)\cos u+\frac{1}{2}ab\cos 2u\right\}du\int_0^{2\pi}dv \\ &= -a\left[\frac{3}{2}abu+(a^2+b^2)\sin u+\frac{1}{4}ab\sin 2u\right]_0^{2\pi}\cdot 2\pi \\ &= -6\pi^2a^2b.\end{aligned}$$