§11. Stokes の定理

面積分に関する Stokes の定理について述べよう.
D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, D の境界は曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. 線積分を考えるため, γ には §6 において述べたように, D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておく.
また, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする. このとき, 空間曲線 $p \circ \gamma$ の像は曲面 p の像の境界となるが, $p \circ \gamma$ の向きは γ の向きに合わせておく.

Stokes の定理　p の像の近くで定義された任意の 3 次元ベクトル場 F に対して,

$$\iint_p \mathrm{rot}\, F \overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} F \overrightarrow{ds}.$$

証明　まず, p が D で定義された 2 変数のスカラー値関数

$$f : D \to \mathbf{R}$$

のグラフとして表されているとし, F がスカラー場 φ を用いて

$$F = (\varphi, 0, 0)$$

と表されているときを考える.
このとき,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\, F \overrightarrow{dA} &= \iint_D \langle (\mathrm{rot}\, F)(p(u,v)), p_u \times p_v \rangle du dv \\
&= \iint_D \langle (0, \varphi_z(p(u,v)), -\varphi_y(p(u,v))), (-f_u, -f_v, 1) \rangle du dv \\
&= -\iint_D \left(\varphi_z(p(u,v)) f_v + \varphi_y(p(u,v)) \right) du dv.
\end{aligned}$$

ここで, D 上の 2 次元ベクトル場 G を

$$G(u,v) = (\varphi(p(u,v)), 0) \quad ((u,v) \in D)$$

により定めると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\, G &= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(p(u,v)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v, f(u,v)) \\
&= -(\varphi_y(p(u,v)) + \varphi_z(p(u,v)) f_v).
\end{aligned}$$

ここで, 必要ならば径数付けを変えることにより, γ および $p \circ \gamma$ の向きは $t : a \to b$ としてよい.
また,

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad (t \in [a,b])$$

と表しておくと, Green の定理より,

$$\begin{aligned}\iint_p \mathrm{rot}\, F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \mathrm{rot}\, G dudv \\ &= \int_\gamma G\overrightarrow{ds} \\ &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))), 0), (u'(t), v'(t))\rangle dt \\ &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t)))u'(t)dt.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\int_{p\circ\gamma} F\overrightarrow{ds} &= \int_a^b \langle F((p\circ\gamma)(t)), (p\circ\gamma)'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))), 0, 0), (u'(t), v'(t), (f\circ\gamma)'(t))\rangle dt \\ &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t)))u'(t)dt.\end{aligned}$$

よって, Stokes の定理がなりたつ.
次に, p が一般の曲面で, F が上のように表されているときを考える.
このとき, 曲面をグラフに分割しておくと, 分割された各グラフにおいて Stokes の定理がなりたつ.
また, 各グラフの境界のうち D の内部にあるものの像については, 向きが逆のものが対で現れるから, それらに沿った線積分の値は 0 となる.
したがって, Stokes の定理がなりたつ.
更に, p と F が一般のときを考える.
F を

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

と表しておくと,

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(F_1, 0, 0)\overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (F_1, 0, 0)\overrightarrow{ds}.$$

同様に,

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(0, F_2, 0)\overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (0, F_2, 0)\overrightarrow{ds},$$

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(0, 0, F_3)\overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (0, 0, F_3)\overrightarrow{ds}.$$

これらを合わせると,

$$\iint_p \mathrm{rot}\, F\overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} F\overrightarrow{ds}.$$

□

例 D を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定まる領域, f を

$$f(u,v)=\sqrt{1-u^2-v^2}\quad((u,v)\in D)$$

により定まる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p: D\to\mathbf{R}^3\quad((u,v)\in D)$$

を f のグラフ

$$p(u,v)=(u,v,f(u,v))\quad((u,v)\in D)$$

として表しておく.
また, 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y,z)=(yz,-zx,0)\quad((x,y,z)\in\mathbf{R}^3)$$

により定める.
このとき, Stokes の定理がなりたつことを直接確かめてみよう.
まず,

$$\mathrm{rot}\,F=(x,y,-2z).$$

また, §10 においても扱ったように,

$$p_u\times p_v=\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1\right)$$

で, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E=\{(r,\theta)|0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

へ写されるから,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\,F\overrightarrow{dA}&=\iint_D\left\langle\left(u,v,-2\sqrt{1-u^2-v^2}\right),\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1\right)\right\rangle dudv\\
&=\iint_D\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}-2\sqrt{1-u^2-v^2}\right)dudv\\
&=\iint_E\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}-2\sqrt{1-r^2}\right)rdrd\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}-2r\sqrt{1-r^2}\right)drd\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\left[-r^2\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}0d\theta\\
&=0.
\end{aligned}$$

一方, γ を D の境界を表す曲線とすると, F の $p\circ\gamma$ の像における値は恒等的に零ベクトルであるから,

$$\int_{p\circ\gamma}F\overrightarrow{ds}=0.$$

問題 11

1. D を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定まる領域, f を

$$f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u, v) \in D)$$

により定まる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D)$$

を f のグラフ

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

として表しておく. また, $n \in \mathbf{N}$ に対して 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = (y^{n-1}, z^{n-1}, x^{n-1}) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. Stokes の定理を用いて, 面積分 $\displaystyle\iint_p \mathrm{rot}\, F \overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

2. D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, D の境界は曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. また, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする.

(1) $a \in \mathbf{R}^3$ とすると,

$$\iint_{p\circ\gamma} a \times (p \circ \gamma) \overrightarrow{ds} = 2 \int_p a \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(2) f, g を p の像の近くで定義されたスカラー場とすると,

$$\int_{p\circ\gamma} f \mathrm{grad}\, g \overrightarrow{ds} = \iint_p \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(3) §5 において現れた Maxwell の方程式の 2 番目の方程式

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

から Faraday の電磁誘導の法則

$$\int_{p\circ\gamma} E \overrightarrow{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_p B \overrightarrow{dA}$$

を導け.

問題 11 の解答

1. γ を D の境界を表す曲線とすると,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

で,

$$(p \circ \gamma)(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Stokes の定理より,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\, F \overrightarrow{dA} &= \int_{p\circ\gamma} F \overrightarrow{ds} \\
&= \int_0^{2\pi} \langle F((p\circ\gamma)(t)), (p\circ\gamma)'(t)\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (\sin^{n-1} t, 0, \cos^{n-1} t), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^n t dt \\
&= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -4\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}), \\ -2\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi & (n \text{ は偶数}). \end{cases}
\end{aligned}$$

2. (1) 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = a \times (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.
$a = (a_1, a_2, a_3)$ とおくと,

$$F = (a_2 z - a_3 y, a_3 x - a_1 z, a_1 y - a_2 x)$$

だから,

$$\mathrm{rot}\, F = 2a.$$

よって, Stokes の定理より,

$$\iint_{p\circ\gamma} a \times (p\circ\gamma) \overrightarrow{ds} = 2\int_p a \overrightarrow{dA}.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(f \mathrm{grad}\, g) &= \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g + f \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, g) \\
&= \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g.
\end{aligned}$$

よって, Stokes の定理より,

$$\int_{p\circ\gamma} f \operatorname{grad} g \overrightarrow{ds} = \iint_p \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \overrightarrow{dA}.$$

(3) Stokes の定理より,

$$\begin{aligned}\int_{p\circ\gamma} E\overrightarrow{ds} &= \iint_p \operatorname{rot} E\overrightarrow{dA} \\ &= -\iint_p \frac{\partial B}{\partial t}\overrightarrow{dA} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\iint_p B\overrightarrow{dA}.\end{aligned}$$